

НЯКОИ МЕТОДИЧЕСКИ ПОДХОДИ ЗА СЪСТАВЯНЕ НА ЗАДАЧИ ЗА ОЛИМПИАДИ

¹Сава Гроздев, ²Веселин Ненков

¹Българска академия на науките

²Технически колеж - Ловеч

Резюме. За разлика от задачите, включени в курсовете на обучение или давани на изпити по математически дисциплини, задачите за олимпиади трябва да осигуряват възможност за проявяване на творчество и нестандартно мислене от страна на състезателите. Ето защо е желателно те да предполагат наличието на повече от един метод за намиране на решение. В статията са предложени задачи от такъв тип, като са описани различни подходи за тяхното решаване.

Keywords: methodology, olympiad problems, complex numbers, matrix, recurrence equation

Решаването на задачи, включени в курсовете на обучение или давани на изпити, включва прилагане на добре познати и изучавани методи и прийоми и не изисква особена изобретателност. Задачите, които са предназначени за решаване по време на олимпиади, трябва коренно да се отличават с наличие на проблем, който може да се реши творчески и нестандартно. Н. Колмогоров цитира един афоризъм, съгласно който „голямото научно откритие се отличава от хубавата задача, давана на олимпиада, само по това, че за решаване на задача за олимпиада се изискват 5 часа, а за получаването на крупен научен резултат – 5000 часа“ (Колмогоров, 1988).

Освен състезателен характер олимпиадите имат и сериозен принос за повишаване на подготовката на част от студентите и учениците. Тази част не е голяма като брой, но е изключително качествена. Това са млади хора, които имат потенциал да се занимават в бъдеще с творческа дейност и да допринасят за развитието на науката. Затова е важно задачите да бъдат такива, че да имат характер на малки научни изследвания. Така както една задача от практиката (не задължително математическа) може да се реши с прилагане на различни подходи, то и до решението на състезателна задача следва да се стига с използване на знания от различни дялове на математиката. В по-нататъшното изложение са представени такива примери.

Задача 1. Да се намерят всички 2×2 матрици A с еднакви елементи по главния диагонал, за които $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$ (A^T е транспонираната матрица на A).

Нека $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$. Тогава $A.A^T = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & a(b+c) \\ a(b+c) & a^2 + c^2 \end{bmatrix}$. Следователно елементите на матрицата A удовлетворяват системата:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 13 \\ a(b+c) = 14 \\ a^2 + c^2 = 20 \end{cases}$$

Ще предложим два различни подхода за решаване на тази задача – алгебричен и геометричен.

Първи подход. Изразяваме от второто уравнение $b+c = \frac{14}{a}$. Изваждаме от третото уравнение на системата първото и получаваме $(c-b)(c+b) = 7$ или $(c-b)\frac{14}{a} = 7$, откъдето $c = \frac{a}{2} + b$. Заместваме в третото уравнение и стигаме до следната система от две уравнения с две неизвестни:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 13 \\ 5a^2 + 4ab + 4b^2 = 80 \end{cases}$$

Събираме двете уравнения, предварително умножени съответно по 80 и -13 . Получаваме хомогенното уравнение:

$$15a^2 - 52ab + 28b^2 = 0.$$

След като разделим двете му страни на a^2 и положим $t = \frac{b}{a}$, стигаме до квадратното уравнение

$$28t^2 - 52t + 15 = 0 \text{ с корени } t_1 = \frac{5}{14}, t_2 = \frac{3}{2}.$$

Първи случай:

$$b = \frac{5}{14}a. \text{ След заместване в първото уравнение на системата намираме } a = \pm \frac{14}{\sqrt{17}}.$$

$$\text{Следователно } b = \pm \frac{5}{\sqrt{17}}, c = \frac{a}{2} + b = \pm \frac{12}{\sqrt{17}}.$$

Втори случай:

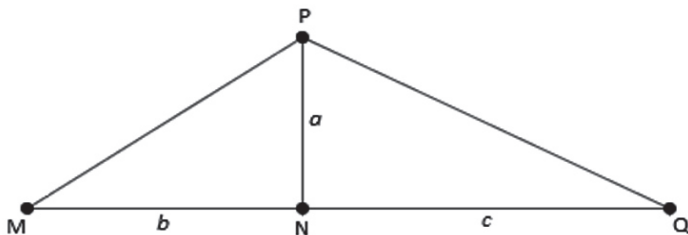
$$b = \frac{3}{2}a. \text{ След заместване в първото уравнение на системата намираме } a = \pm 2.$$

$$\text{Следователно } b = \pm 3, c = \frac{a}{2} + b = \pm 4.$$

Окончателно решенията на първоначалната система са:

$$\left(\frac{14}{\sqrt{17}}, \frac{5}{\sqrt{17}}, \frac{12}{\sqrt{17}}\right), \left(-\frac{14}{\sqrt{17}}, -\frac{5}{\sqrt{17}}, -\frac{12}{\sqrt{17}}\right), (2, 3, 4) \text{ и } (-2, -3, -4).$$

Втори подход. Построяваме два правоъгълни триъгълника MNP и NPQ с катети $NP = a$, катети $MN = b$, $NQ = c$ и хипотенузи съответно $MP = \sqrt{13}$ и $PQ = \sqrt{20}$.



За лицето на $\triangle MPQ$ имаме $S_{\triangle MPQ} = \frac{(b+c) \cdot a}{2}$, но от системата $a \cdot (b+c) = 14$ и следователно $S_{\triangle MPQ} = \frac{14}{2} = 7$.

От друга страна, $S_{\triangle MPQ} = \frac{MP \cdot PQ \cdot \sin \angle MPQ}{2}$, откъдето $\sin \angle MPQ = \frac{7}{\sqrt{65}}$.

Оттук следва, че $\cos \angle MPQ = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{7}{\sqrt{65}}\right)^2} = \pm \frac{4}{\sqrt{65}}$.

За $\triangle MPQ$ прилагаме косинусова теорема:

$$MQ^2 = MP^2 + PQ^2 - 2 \cdot MP \cdot PQ \cdot \cos \angle MPQ.$$

Първи случай:

$$(b+c)^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{20})^2 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{20} \cdot \frac{4}{\sqrt{65}}.$$

Получаваме $(b+c)^2 = 17$, откъдето $b+c = \pm\sqrt{17}$. Тогава $a = \pm \frac{14}{\sqrt{17}}$, $b = \pm \frac{5}{\sqrt{17}}$ и $c = \pm \frac{12}{\sqrt{17}}$.

Втори случай:

$$(b+c)^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{20})^2 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{20} \cdot \left(-\frac{4}{\sqrt{65}}\right).$$

Получава се $(b+c)^2 = 49$, откъдето $b+c = \pm 7$. Тогава $a = \pm 2$, $b = \pm 3$ и $c = \pm 4$.

След непосредствена проверка определяме решенията на системата:

$$\left(\frac{14}{\sqrt{17}}, \frac{5}{\sqrt{17}}, \frac{12}{\sqrt{17}}\right), \left(-\frac{14}{\sqrt{17}}, -\frac{5}{\sqrt{17}}, -\frac{12}{\sqrt{17}}\right), (2, 3, 4) \text{ и } (-2, -3, -4).$$

Окончателно всички търсени матрици са:

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ \sqrt{17} & \sqrt{17} \\ 12 & 14 \\ \sqrt{17} & \sqrt{17} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ -\sqrt{17} & -\sqrt{17} \\ 12 & 14 \\ -\sqrt{17} & -\sqrt{17} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Задача 2. Ако $a, b \neq 0, u, v$ са реални числа, да се докаже, че

$$r_n = \frac{v - u(a - \sqrt{b})}{2\sqrt{b}}(a + \sqrt{b})^n - \frac{v - u(a + \sqrt{b})}{2\sqrt{b}}(a - \sqrt{b})^n \quad (1)$$

е реално число за всяко $n=0,1,2,\dots$:

а) при $u = 0, v = 1$;

б) при произволни u и v .

Ако $b > 0$, то е очевидно, че r_n е реално число. Остава да се разгледа случаят $b < 0$.

Ще предложим три принципно различни подхода за решаване на задачата, предполагащи наличието на различни теоретични знания и умения на състезателя.

Първи подход (чрез развиване по формулата за Нютонов бином)

а) При $u = 0, v = 1$ след преобразуване получаваме:

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{2\sqrt{b}} \left[(a + \sqrt{b})^n - (a - \sqrt{b})^n \right] = \frac{1}{2\sqrt{b}} \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} (\sqrt{b})^k (1 - (-1)^k) = \\ &= \frac{2}{2\sqrt{b}} \sum_{\substack{k=0 \\ k-\text{нечетно}}}^n C_n^k a^{n-k} (\sqrt{b})^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k-\text{нечетно}}}^n C_n^k a^{n-k} b^{\frac{k-1}{2}}. \end{aligned}$$

Последният израз в равенството показва, че r_n е реално число.

б) При произволни реални u и v след преобразуване получаваме:

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{2\sqrt{b}} \left[(v - u(a - \sqrt{b}))(a + \sqrt{b})^n + (-v + u(a + \sqrt{b}))(a - \sqrt{b})^n \right] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{b}} \left[\sum_{k=0}^n C_n^k (v - u(a - \sqrt{b})) a^{n-k} (\sqrt{b})^k + \sum_{k=0}^n C_n^k (-v + u(a + \sqrt{b})) a^{n-k} (-1)^k (\sqrt{b})^k \right] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{b}} \left[\sum_{k=0}^n C_n^k v a^{n-k} (\sqrt{b})^k - \sum_{k=0}^n C_n^k u a a^{n-k} (\sqrt{b})^k + \sum_{k=0}^n C_n^k u \sqrt{b} a^{n-k} (\sqrt{b})^k - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^n C_n^k v a^{n-k} (-1)^k (\sqrt{b})^k + \sum_{k=0}^n C_n^k u a a^{n-k} (-1)^k (\sqrt{b})^k + \sum_{k=0}^n C_n^k u \sqrt{b} a^{n-k} (-1)^k (\sqrt{b})^k \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b}} \left[\sum_{k=0}^n C_n^k v a^{n-k} (\sqrt{b})^k (1 - (-1)^k) + \sum_{k=0}^n C_n^k u a a^{n-k} (\sqrt{b})^k ((-1)^k - 1) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^n C_n^k u \sqrt{b} a^{n-k} (\sqrt{b})^k (1 + (-1)^k) \right].$$

Последната сума представяме във вида $r_n = r'_n + r''_n$, където r'_n е сумата на събираемите при четни стойности на k , а r''_n – сумата на събираемите при нечетни стойности на k . Тъй като числата $r'_n = \frac{2}{2\sqrt{b}} \sum_{k-\text{четно}} C_n^k u a^{n-k} (\sqrt{b})^{k+1}$ и $r''_n = \frac{2}{2\sqrt{b}} \left[\sum_{k-\text{нечетно}} C_n^k v a^{n-k} (\sqrt{b})^k - \sum_{k-\text{нечетно}} C_n^k u a a^{n-k} (\sqrt{b})^k \right] = \sum_{k-\text{нечетно}} C_n^k v a^{n-k} (\sqrt{b})^{k-1} - \sum_{k-\text{нечетно}} C_n^k u a a^{n-k} (\sqrt{b})^{k-1}$ са реални, то r_n е също реално число.

Втори подход

а) Разглеждаме матрицата с реални елементи $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & a \end{pmatrix}$, за която $\text{tr}(A) = 2a$ и $\det(A) = a^2 - b$. От изследванията на Р. Николаев и Й. Петков (Николаев & Петков, 2014) следва, че

$$A^n = a_n A - b_n E,$$

където a_n удовлетворява рекурентното уравнение

$$a_n - \text{tr}(A)a_{n-1} + \det(A)a_{n-2} = 0 \quad (2)$$

и

$$b_n = \det(A)a_{n-1}.$$

На (2) съответства характеристично уравнение

$$x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A) = 0$$

с корени $x_{1,2} = a \pm \sqrt{b}$, откъдето

$$a_n = c_1(a + \sqrt{b})^n + c_2(a - \sqrt{b})^n.$$

Като използваме, че

$$a_0 = 0 = c_1 + c_2 \text{ и } a_1 = 1 = c_1(a + \sqrt{b}) + c_2(a - \sqrt{b}),$$

$$\text{намираме } c_1 = -c_2 = \frac{1}{2\sqrt{b}}.$$

Получава се (1) в случая $u=0, v=1$. Като се има предвид, че A е матрица с реални елементи, то и A^n е матрица с реални елементи за всяко $n=0,1,2,\dots$. Следователно r_n е реално число за всяко $n=0,1,2,\dots$ при $u=0, v=1$.

б) Като използваме тази идея, можем да направим следното обобщение: нека r_n удовлетворява рекурентното уравнение

$$r_n = 2ar_{n-1} - (a^2 - b)r_{n-2}, \quad (3)$$

като $r_0 = u, r_1 = v$. Тогава за r_n ще се получи точно равенство (1). Тъй като $r_0, r_1 \in \mathbb{R}$, то от (3) следва, че и $r_2 \in \mathbb{R}$ (по условие $a, b \in \mathbb{R}$). Пак от (3) се получава, че за всяко $n=0, 1, 2, \dots$ числото r_n е реално за произволни реални числа $a, b \neq 0, u, v$.

Трети подход (чрез аритметични действия с комплексни числа)

Ако означим $v - ua + u\sqrt{b} = z_1$ и $a + \sqrt{b} = z_2$, то

$$r_n = \frac{1}{2i \cdot \text{Im } z_2} (z_1 z_2^n - \overline{z_1 z_2^n}).$$

Означаваме $z_2^n = z_3$ и $z_1 z_3 = z_4$. Тогава

$$r_n = \frac{1}{2i \cdot \text{Im } z_2} (z_4 - \overline{z_4}) = \frac{1}{i \cdot 2 \text{Im } z_2} \cdot 2 \text{Im } z_4 \cdot i = \frac{\text{Im } z_4}{\text{Im } z_2} \in \mathbb{R}.$$

Предложената задача е подходяща от гледна точка на това, че има различни, основаващи се на методическо разнообразие, начини за решаване и избраният подход от състезателя би съответствал на неговата индивидуална подготовка и творческо мислене².

Нека формулираме следната:

Задача 3. Нека a, b, c и d са произволни реални числа. Да се докаже, че

$$(a + \sqrt{b})(c + \sqrt{d})^n + (a - \sqrt{b})(c - \sqrt{d})^n$$

е реално число.

Запознатите с комплексни числа лесно ще я решат, като покажат, че числото $z_1 z_2^n + \overline{z_1 z_2^n}$ е реално, където $z_1 = a + \sqrt{b}$ и $z_2 = c + \sqrt{d}$.

Тези, които не са изучавали комплексни числа и действия с тях, биха могли да я решат по някой от първите два подхода, изложени в решението на задача 1. За тях, разбира се, се изискват знания или за Нютонов бином, или за решаване на рекурентни уравнения.

Накрая ще предложим една задача, която е частен случай на задача 1.

Задача 4. Да се докаже, че числото

$$p_n = (6 + i)(2 + 3i)^n + (6 - i)(2 - 3i)^n$$

е реално за всяко $n = 0, 1, 2, \dots$

Един възможен начин за решаване е, като се приложи казаното по-горе за комплексни числа. Друг подход е чрез използване на задача 1, като $a = 2, b = -9, u = 2, v = 3$. Тогава

$$p_n = \frac{1}{6} r_n,$$

където от (3) ще следва, че

$$r_n = 4r_{n-1} - 13r_{n-2}, \quad r_0 = u = 2, r_1 = v = 3.$$

Съгласно задача 1, r_n е реално число за всяко $n = 0, 1, 2, \dots$. Следователно и $p_n = \frac{1}{6} r_n$ е реално число за всяко $n = 0, 1, 2, \dots$

Изводи, които се налагат по отношение съставянето на състезателни задачи

1) Задачите, които се предлагат, не трябва да имат единствен, еднозначен метод за решаване, а да имат възможност за прилагане на различни подходи (в зависимост от натрупания теоретичен потенциал), които да водят до намиране на решението.

2) В същото време да няма прекалено „прост“ начин за тяхното решаване, освен ако той не е основан на някакви твърдения, които са извън преподавания материал и изискват (солидна) допълнителна подготовка на състезателите (например стереометрична задача, в която се прилага теоремата на Креле).

3) Нека не изхождаме от гледна точка на уменията на автора на дадена задача, който в повечето случаи е специалист в конкретна област на математиката. На практика се предлагат задачи от различни области, като състезателите не могат да са всезнаещи във всяка област и не е задължително да познават всички теоретични постановки в тях. Следователно трябва да има алтернативни варианти като възможност за решаване на съответните задачи, чрез което да се покаже последователността от мисловни разсъждения, а не познаване само на тънкостите в конкретната материя. Тогава бихме могли да подберем „звездичките“, а не да дадем задача, в която например, ако не знаеш теорема „№ n “ на математика „X“, да не можеш по никакъв друг начин да намериш решението.

БЕЛЕЖКИ

1. От второто уравнение на системата непосредствено се вижда, че $a \neq 0, b \neq -c$.
2. Авторите не претендират, че предложените подходи за решаване на задачите изчерпват всички възможни.

ЛИТЕРАТУРА

Колмогоров, А. Н. (1998). „Математика – наука и професия“. Москва.

Николаев, Р. & Петков, Й. (2014). Някои методически обобщения за решаване на един тип задачи от линейната алгебра. *Математика и информатика*, 57 (2), 155 – 165.

SOME METHODOLOGICAL APPROACHES TO COMPOSE OLYMPIAD PROBLEMS

Abstract. In comparison with problems, included in lecture courses or in exams on mathematical subjects, the Olympiad problems should assure possibilities for creativity and non-standard thinking of competitors. Thus, it is quite desirable that such problems allow more than one method to find corresponding solutions. The paper proposes a type of problems with various approaches to their solutions.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**

Institute of Mathematics and Informatics – BAS

Acad. G. Bonchev Street, bl. 8

1113 Sofia, Bulgaria

E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College Lovech

31, Sajko Saev Street

Lovech, Bulgaria

vnenkov@mail.bg