

КРИВА НА ЧЕВА ЗА ТОЧКА ОТ РАВНИНАТА НА ТРИЪГЪЛНИК

¹Сава Гроздев, ²Веселин Ненков

¹Българска академия на науките

²Технически колеж - Ловеч

Резюме. В настоящата статия е описан начин за получаване на конични сечения, определени от произволно описано за даден триъгълник конично сечение и точка в равнината на този триъгълник. Отбелязани са някои свойства на получените конични сечения.

Keywords: triangle, homothety, conic, Ceva circle, Ceva curve, Feuerbach configuration, Euler curve, Nagel point, GSP

В настоящата статия ще покажем как се получава обобщение на един широк клас окръжности в равнината на даден триъгълник. Това обобщение се състои в специално построяване на конични сечения. В построяването на коничните сечения и откриването на някои от техните свойства ще използваме конструктивните и динамични възможности на програмата "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" (GSP).

Нека ABC е произволен триъгълник, за който $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, $p = \frac{a+b+c}{2}$, а S е лицето му. Разглеждаме барицентрични координати спрямо $\triangle ABC$, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ (Паскалев & Чобанов, 1985). Нека $P(\lambda, \mu, \nu)$ е произволна точка от равнината на $\triangle ABC$, нележаща на никоя от правите BC , CA и AB . За крайна точка P е изпълнено равенството $\lambda + \mu + \nu = 1$, а за безкрайна – равенството $\lambda + \mu + \nu = 0$. Означаваме $A_1 = AP \cap BC$, $B_1 = PB \cap CA$ и $C_1 = CP \cap AB$. Тогава координатите на тези точки се представят по следния начин:

$$(1) \quad A_1 \left(0, \frac{\mu}{\mu + \nu}, \frac{\nu}{\mu + \nu} \right), B_1 \left(\frac{\lambda}{\nu + \lambda}, 0, \frac{\nu}{\nu + \lambda} \right), C_1 \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \frac{\mu}{\lambda + \mu}, 0 \right).$$

1. Окръжност на Чева. Точките A_1 , B_1 и C_1 лежат на една окръжност c_p , която ще наричаме *окръжност на Чева за точката P спрямо $\triangle ABC$* . Нека вторите пресечни точки на c_p с правите BC , CA и AB са съответно A_2 , B_2 и C_2 . Известно е, че правите AA_2 , BB_2 и CC_2 минават през една точка P' (Хитов, 1990). Следователно точките P и P' имат една и съща окръжност на Чева спрямо $\triangle ABC$, т.е. $c_{p'} \equiv c_p$. В частност, общата окръжност на Чева за медицентъра G и ортоцентъра H на $\triangle ABC$

е Ойлеровата окръжност на ΔABC . Първата ни задача, свързана с окръжността на Чева c_p , е да намерим нейното уравнение. За целта ще разглеждаме и барицентрични координати спрямо $\Delta A_1 B_1 C_1$, като $A_1(1,0,0)$, $B_1(0,1,0)$ и $C_1(0,0,1)$. Ако точка M има координати (x, y, z) спрямо ΔABC и координати (x_1, y_1, z_1) спрямо $\Delta A_1 B_1 C_1$, връзките между тези координати се изразяват с равенствата:

$$(2) \quad x = \frac{\lambda}{\lambda + \nu} y_1 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} z_1, \quad y = \frac{\mu}{\mu + \nu} x_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} z_1, \quad z = \frac{\nu}{\mu + \nu} x_1 + \frac{\nu}{\nu + \lambda} y_1$$

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 &= -\frac{\mu + \nu}{2\lambda} x + \frac{\mu + \nu}{2\mu} y + \frac{\mu + \nu}{2\nu} z, \\ y_1 &= \frac{\nu + \lambda}{2\lambda} x - \frac{\nu + \lambda}{2\mu} y + \frac{\nu + \lambda}{2\nu} z, \\ z_1 &= \frac{\lambda + \mu}{2\lambda} x + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} y - \frac{\lambda + \mu}{2\nu} z. \end{aligned}$$

Въвеждаме означенията:

$$(4) \quad \begin{aligned} \bar{a} &= (\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu a^2 + (\nu - \mu)(\lambda + \mu)\nu\lambda b^2 + (\mu - \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu c^2, \\ \bar{b} &= (\nu - \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu a^2 + (\lambda + \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda b^2 + (\lambda - \nu)(\mu + \nu)\lambda\mu c^2, \\ \bar{c} &= (\mu - \lambda)(\nu + \lambda)\mu\nu a^2 + (\lambda - \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda b^2 + (\mu + \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu c^2. \end{aligned}$$

Ако $|B_1 C_1| = a_1$, $|C_1 A_1| = b_1$ и $|A_1 B_1| = c_1$, то са изпълнени равенствата:

$$(5) \quad a_1^2 = \frac{\bar{a}}{(\nu + \lambda)^2 (\lambda + \mu)^2}, \quad b_1^2 = \frac{\bar{b}}{(\lambda + \mu)^2 (\mu + \nu)^2}, \quad c_1^2 = \frac{\bar{c}}{(\mu + \nu)^2 (\nu + \lambda)^2}.$$

Сега, като вземем предвид, че уравнението на описаната около ΔABC окръжност Γ спрямо ΔABC е следното

$$(6) \quad a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy = 0,$$

то уравнението на c_p спрямо $\Delta A_1 B_1 C_1$ ще бъде

$$(7) \quad a_1^2 y_1 z_1 + b_1^2 z_1 x_1 + c_1^2 x_1 y_1 = 0.$$

Така след заместване на (3) и (5) в (7) уравнението на c_p спрямо ΔABC се получава във вида:

$$(8) \quad c_p : \mu\nu a'x^2 + \nu\lambda b'y^2 + \lambda\mu c'z^2 - \lambda(\mu+\nu)\bar{a}yz - \mu(\nu+\lambda)\bar{b}zx - \nu(\lambda+\mu)\bar{c}xy = 0,$$

където

$$\begin{aligned} a' &= -(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)\mu\nu a^2 + (\lambda+\mu)(\mu+\nu)\nu\lambda b^2 + (\mu+\nu)(\nu+\lambda)\lambda\mu c^2, \\ (9) \quad b' &= (\nu+\lambda)(\lambda+\mu)\mu\nu a^2 - (\lambda+\mu)(\mu+\nu)\nu\lambda b^2 + (\mu+\nu)(\nu+\lambda)\lambda\mu c^2, \\ c' &= (\nu+\lambda)(\lambda+\mu)\mu\nu a^2 + (\lambda+\mu)(\mu+\nu)\nu\lambda b^2 - (\mu+\nu)(\nu+\lambda)\lambda\mu c^2. \end{aligned}$$

Сега, за да намерим координатите на точката A_2 , решаваме системата уравнения, която се получава от $x=0$ и (8). Намираме равенството $(\nu y - \mu z)(b'y - c'z) = 0$. Първият множител води до координатите на точката A_1 , затова от втория множител намираме координатите на A_2 във вида:

$$(10) \quad A_2 \left(0, \frac{c'}{2(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)\mu\nu a^2}, \frac{b'}{2(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)\mu\nu a^2} \right).$$

По аналогичен начин се намират координатите на B_2 и C_2 във вида

$$(11) \quad \begin{aligned} B_2 &\left(\frac{c'}{2(\lambda+\mu)(\mu+\nu)\nu\lambda b^2}, 0, \frac{a'}{2(\lambda+\mu)(\mu+\nu)\nu\lambda b^2} \right), \\ C_2 &\left(\frac{b'}{2(\mu+\nu)(\nu+\lambda)\lambda\mu c^2}, \frac{a'}{2(\mu+\nu)(\nu+\lambda)\lambda\mu c^2}, 0 \right), \end{aligned}$$

където a' , b' и c' са определени с (9).

След използване на (10) и (11) намираме уравненията на правите AA_2 и BB_2 , откъдето получаваме координатите на пресечната им точка P' :

$$(12) \quad P' \left(\frac{b'c'}{\tau}, \frac{c'a'}{\tau}, \frac{a'b'}{\tau} \right),$$

където

$$(13) \quad \begin{aligned} \tau &= 2\lambda\mu\nu(\mu+\nu)(\nu+\lambda)(\lambda+\mu) \left[\lambda(\mu+\nu)b^2c^2 + \mu(\nu+\lambda)c^2a^2 + \nu(\lambda+\mu)a^2b^2 \right] - \\ &\quad - (\nu+\lambda)^2(\lambda+\mu)^2\mu^2\nu^2a^4 - (\lambda+\mu)^2(\mu+\nu)^2\nu^2\lambda^2b^4 - (\mu+\nu)^2(\nu+\lambda)^2\lambda^2\mu^2c^4. \end{aligned}$$

От (12) се вижда по начин, различен от показания в (Хитов, 1990), че правите AA_2 , BB_2 и CC_2 минават през една точка P' . Точката P' е безкрайна, когато P описва

крива от осма степен с уравнение $\tau = 0$, което се получава от (13). С помощта на (12) всички окръжности на Чева задават едно инволютивно изображение в равнината на ΔABC , което на всяка точка P , нележаща на никоя от правите BC , CA и AB , съпоставя точка P' . Една от двойните точки на това изображение е добре известната точка на Жергон. Повече по въпроса за двойните точки ще отбележим, след като определим понятието крива на Чева.

Във връзка с окръжността на Чева c_P за точка P е интересно да определим координатите на нейния център. Центърът на описаната за ΔABC окръжност Γ има следните координати $\left(\frac{a^2(-a^2+b^2+c^2)}{16S^2}, \frac{b^2(a^2-b^2+c^2)}{16S^2}, \frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{16S^2} \right)$.

Следователно координатите на центъра $O(P)$ на описаната за $\Delta A_1B_1C_1$ окръжност C_P спрямо $\Delta A_1B_1C_1$ са $\left(\frac{a_1^2(-a_1^2+b_1^2+c_1^2)}{16S_1^2}, \frac{b_1^2(a_1^2-b_1^2+c_1^2)}{16S_1^2}, \frac{c_1^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2)}{16S_1^2} \right)$, където S_1

е лицето на $\Delta A_1B_1C_1$. Заместваме (5) и равенството $S_1^2 = \frac{4\lambda^2\mu^2\nu^2S^2}{(\mu+\nu)^2(\nu+\lambda)^2(\lambda+\mu)^2}$ в тези координати. Координатите на $O(P)$ спрямо $\Delta A_1B_1C_1$ получаваме във вида

$$x'_{O(P)} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{a}}{32(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)\lambda^2\mu^2\nu^2S^2},$$

$$y'_{O(P)} = \frac{\bar{b} \cdot \bar{b}}{32(\lambda+\mu)(\mu+\nu)\lambda^2\mu^2\nu^2S^2},$$

$$z'_{O(P)} = \frac{\bar{c} \cdot \bar{c}}{32(\mu+\nu)(\nu+\lambda)\lambda^2\mu^2\nu^2S^2},$$

където $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ се определят с равенствата:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= -(\lambda^2 + \mu\nu)\mu\nu a^2 + (\mu + \nu)\nu\lambda^2 b^2 + (\mu + \nu)\mu\lambda^2 c^2, \\ \bar{b} &= (\nu + \lambda)\nu\mu^2 a^2 - (\mu^2 + \nu\lambda)\nu\lambda b^2 + (\nu + \lambda)\lambda\mu^2 c^2, \\ \bar{c} &= (\lambda + \mu)\mu\nu^2 a^2 + (\lambda + \mu)\lambda\nu^2 b^2 - (\nu^2 + \lambda\mu)\lambda\mu c^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Оттук и (2) за координатите на $O(P)$ спрямо ΔABC получаваме

$$\begin{aligned}
 x_{O(P)} &= \frac{\lambda(\bar{b}\bar{b} + \bar{c}\bar{c})}{32(\mu + \nu)(\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\lambda^2\mu^2\nu^2S^2}, \\
 y_{O(P)} &= \frac{\mu(\bar{c}\bar{c} + \bar{a}\bar{a})}{32(\mu + \nu)(\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\lambda^2\mu^2\nu^2S^2}, \\
 z_{O(P)} &= \frac{\nu(\bar{a}\bar{a} + \bar{b}\bar{b})}{32(\mu + \nu)(\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\lambda^2\mu^2\nu^2S^2}.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

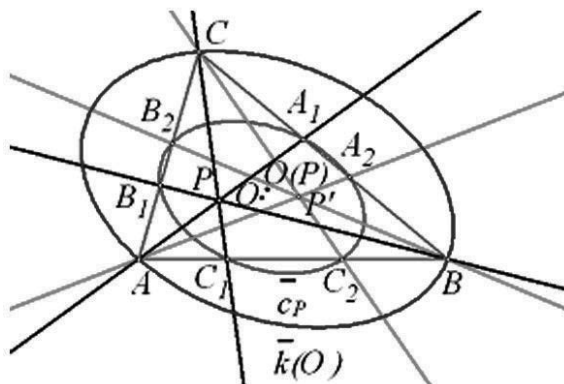
2. Крива на Чева. Ще определим подходящо конично сечение, което обобщава разглежданото понятие окръжност на Чева. Желаното обобщение ще намерим във връзка с произволно описано за $\triangle ABC$ конично сечение $\bar{k}(O)$, което има за център точката $O(x_0, y_0, z_0)$. Кривата $\bar{k}(O)$ може да се определи с уравнението

$$(16) \quad (-x_0 + y_0 + z_0)x_0yz + (x_0 - y_0 + z_0)y_0zx + (x_0 + y_0 - z_0)z_0xy = 0.$$

Уравнението (8) на окръжността C_P определихме, като използваме, че то изглежда по същия начин спрямо $\triangle A_1B_1C_1$, както уравнението (6) на описаната за $\triangle ABC$ окръжност Γ спрямо $\triangle ABC$. Ще използваме същата идея, за да определим конично сечение, описано около $\triangle A_1B_1C_1$. Уравнение (16) се получава от (6), като a^2 , b^2 и c^2 се заменят съответно с $(-x_0 + y_0 + z_0)x_0$, $(x_0 - y_0 + z_0)y_0$ и $(x_0 + y_0 - z_0)z_0$. Затова разглеждаме конично сечение $\bar{c}_P$, което има уравнение (8) с коефициенти a' , b' и c' , получаващи се с равенствата

$$\begin{aligned}
 a' &= -(\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + (\lambda + \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + \\
 &\quad + (\mu + \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu(x_0 + y_0 - z_0)z_0, \\
 b' &= (\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 - (\lambda + \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + \\
 (9') \quad &\quad + (\mu + \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu(x_0 + y_0 - z_0)z_0, \\
 c' &= (\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + (\lambda + \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda(x_0 - y_0 + z_0)y_0 - \\
 &\quad - (\mu + \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu(x_0 + y_0 - z_0)z_0.
 \end{aligned}$$

Последните равенства се получават от (9) след извършване на споменатата смяна. Ясно е, че, когато O е центърът на Γ , то $\bar{c}_P \equiv c_P$. Следователно кривата $\bar{c}_P$ е обобщение на окръжността c_P . Кривата $\bar{c}_P$ ще наричаме *крива на Чева за точка P по отношение на описаната крива $\bar{k}(O)$* или само крива на Чева, когато



Фигура 1

се подразбира коя е описаната крива. Тъй като координатите на точките A_2 , B_2 и C_2 в (10) и (11) се получават от (8) без да се извършват преобразувания върху a^2 , b^2 и c^2 , то споменатата смяна води до точки A_2 , B_2 и C_2 , определени с (10), (11) и (9'), лежащи на $\bar{c}_p$. Освен това получаващите се прави AA_2 , BB_2 и CC_2 минават през точка P' , координатите на която се определят с (12), (13) и (9'). Вижда се, че когато са известни координатите на O и P , можем да построим кривата $\bar{c}_p$ по пет от известните върху нея шест точки A_1 , B_1 , C_1 , A_2 , B_2 и C_2 посредством (1), (10), (11) и (9').

I_A

Описаното за $\triangle ABC$ конично сечение $\bar{k}(O)$ може да се представи и с друго уравнение. Нека $I(x_I, y_I, z_I)$ е център на вписано в $\triangle ABC$ конич-

но сечение $k(I)$. Точките $I_A \left(-\frac{x_I}{-x_I + y_I + z_I}, \frac{y_I}{-x_I + y_I + z_I}, \frac{z_I}{-x_I + y_I + z_I} \right)$,

$I_B \left(\frac{x_I}{x_I - y_I + z_I}, -\frac{y_I}{x_I - y_I + z_I}, \frac{z_I}{x_I - y_I + z_I} \right)$, $I_C \left(\frac{x_I}{x_I + y_I - z_I}, \frac{y_I}{x_I + y_I - z_I}, -\frac{z_I}{x_I + y_I - z_I} \right)$

определят триъгълник $I_A I_B I_C$, който се нарича спрегнат на I спрямо $\triangle ABC$ (Паскалев & Чобанов, 1985). Тези точки са центрове на вписани в $\triangle ABC$ конични сечения $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$. Средите на отсечките на $I_A I_B$, $I_B I_C$, $I_C I_A$ и $I_A I_B$, както е показано в (Ненков, 2008), лежат на конично сечение $\bar{k}(O)$ с център точка O . Всяка от точките I и O определя еднозначно другата (Ненков, 2010), затова кривите $\bar{k}(O)$ и $k(I)$ ще

наричаме *асоциирани* спрямо ABC . В (Ненков, 2008) и (Ненков, 2010) е показано, че кривите $k(I)$ и $\bar{k}(O)$ притежават свойства, които са подобни на съответните свойства на вписаната и описаната окръжност за ABC , поради което казваме, че са елементи на *Фойербахова конфигурация*. От споменатите резултати следва, че $\bar{k}(O)$ може да се представи с уравнението

$$(17) \quad x_I^2 yz + y_I^2 zx + z_I^2 xy = 0.$$

Уравнение (17) се получава от (6), като a^2 , b^2 и c^2 се заменят съответно с x_I^2 , y_I^2 и z_I^2 . Затова разгледаното конично сечение $\bar{c}_p$ ще се представи с уравнение (8), в което коефициентите a' , b' и c' се получават с равенствата:

$$\begin{aligned} a' &= -(\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu x_I^2 + (\lambda + \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda y_I^2 + (\mu + \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu z_I^2, \\ (9'') \quad b' &= (\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu x_I^2 - (\lambda + \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda y_I^2 + (\mu + \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu z_I^2, \\ c' &= (\nu + \lambda)(\lambda + \mu)\mu\nu x_I^2 + (\lambda + \mu)(\mu + \nu)\nu\lambda y_I^2 - (\mu + \nu)(\nu + \lambda)\lambda\mu z_I^2. \end{aligned}$$

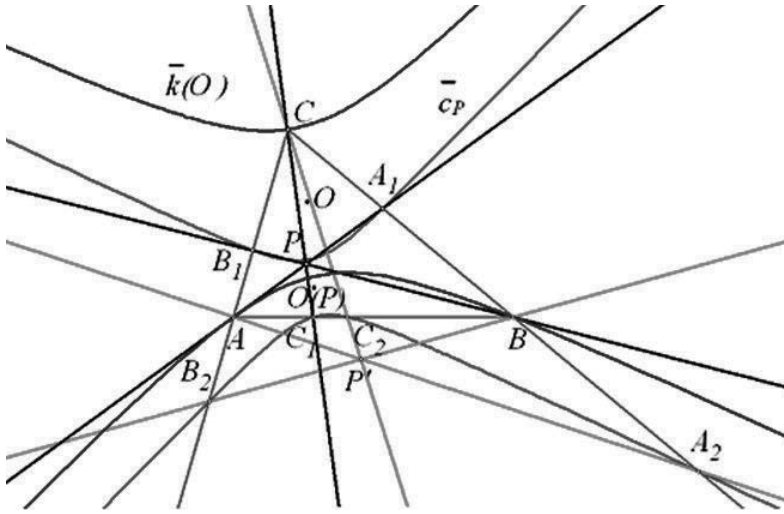
Както и преди, точките A_2 , B_2 , C_2 се определят с (10), (11) и (9''), а $P' - c$ (12), (13) и (9'').

Множеството на кривите на Чева, зададени с (8) и (9') (или (9'')) при фиксирана описана крива $k(O)$, определят инволюция в равнината на $\triangle ABC$ с помощта на (12) и (9') (или (9'')). Двойните елементи на тази инволюция са всички точки P , за които $P' \equiv P$, т.е. точките P , за които $A_1 \equiv A_2$, $B_1 \equiv B_2$ и $C_1 \equiv C_2$. Това е възможно точно когато кривите на Чева са вписани конични сечения, асоциирани с $\bar{k}(O)$. В случай, че $\bar{k}(O)$ е елипса или хипербола, това са вписаните криви $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$. Тогава двойните елементи са точките на Жергон, определени в (Ненков, 2010) със следните координатни представяния:

$$\begin{aligned} J &\left(\frac{(1-2y_I)(1-2z_I)}{\vartheta}, \frac{(1-2z_I)(1-2x_I)}{\vartheta}, \frac{(1-2x_I)(1-2y_I)}{\vartheta} \right), \\ J_A &\left(-\frac{(1-2y_I)(1-2z_I)}{1-4y_I z_I}, \frac{1-2y_I}{1-4y_I z_I}, \frac{1-2z_I}{1-4y_I z_I} \right), \\ J_B &\left(\frac{1-2x_I}{1-4z_I x_I}, -\frac{(1-2z_I)(1-2x_I)}{1-4z_I x_I}, \frac{1-2z_I}{1-4z_I x_I} \right), \\ J_C &\left(\frac{1-2x_I}{1-4x_I y_I}, \frac{1-2y_I}{1-4x_I y_I}, -\frac{(1-2x_I)(1-2y_I)}{1-4x_I y_I} \right), \end{aligned}$$

където $\vartheta = 4x_I y_I + 4y_I z_I + 4z_I x_I - 1$.

Следователно получената инволюция има четири двойни елемента, когато описаната крива $\bar{k}(O)$ е елипса или хипербола. Ако $\bar{k}(O)$ е парабола, асоциираната ѝ вписана парабола е една. Затова и точката на Жергон е една. Тя се задава по следния начин $J\left(\frac{y_I z_I}{y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I}, \frac{z_I x_I}{y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I}, \frac{x_I y_I}{y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I}\right)$ (Ненков, 2010). Следователно в този случай инволюцията има само един двоен елемент.

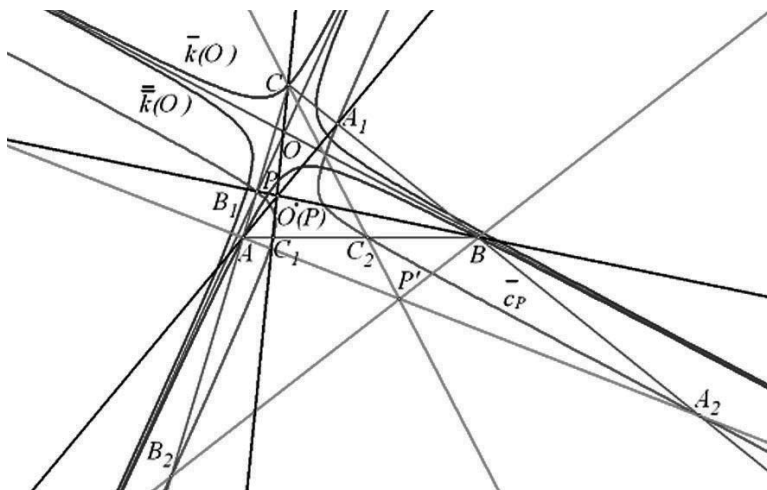


Фигура 2

За да определим координатите на центъра $O(P)$ на кривата на Чева $\bar{c}_P$, постъпваме по следния начин: през точките A_1 и B_1 построяваме прави, успоредни съответно на $B_1 C_1$ и $C_1 A_1$, които пресичат $\bar{c}_P$ съответно в точки A'_1 и B'_1 . След това намираме правата l_a , минаваща през средите на $A_1 A'_1$ и $B_1 C_1$ и правата l_b , минаваща през средите на $B_1 B'_1$ и $C_1 A_1$. За координатите на пресечната точка $O(P)$ на l_a и l_b получаваме формулите (15), в които $\bar{a}$ и $\bar{a}'$ от (4) и (14) съдържат $(-x_0 + y_0 + z_0)x_0$, $(x_0 - y_0 + z_0)y_0$ и $(x_0 + y_0 - z_0)z_0$ (или x_I^2 , y_I^2 и z_I^2), заменящи съответно a^2 , b^2 и c^2 . Освен това в тези равенства $16S^2$ се заменя с

$$\begin{aligned} & (-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0) \\ & \text{(или } (-x_I + y_I + z_I)(x_I - y_I + z_I)(x_I + y_I - z_I)\text{)}. \end{aligned}$$

Следователно координатите на центъра $O(P)$ се определят чрез равенствата (15) (както трябваше да се очаква).



Фигура 3

3. Хомотетични свойства на кривите на Чева. Наблюденията с GSP върху кривите на Чева при фиксирана описана за ΔABC крива $\bar{k}(O)$ показват, че е изпълнено следното

Твърдение 1. Всички криви на Чева по отношение на постоянна, описана за ΔABC крива $\bar{k}(O)$, са от същия вид, от който е $\bar{k}(O)$.

Нещо повече, по-подробните наблюдения с GSP показват, че в зависимост от вида на $\bar{k}(O)$ твърдение 1 се уточнява чрез следващите твърдения:

Твърдение 2. Ако кривата $\bar{k}(O)$ е елипса, то за всяка точка P от равнината на ΔABC кривата $\bar{c}_P$ е елипса, хомотетична на $\bar{k}(O)$ (фиг. 1).

Твърдение 3. Ако кривата $\bar{k}(O)$ е хипербола, то за всяка точка P от равнината на ΔABC кривата $\bar{c}_P$ е хипербола, хомотетична на $\bar{k}(O)$ или на нейната спрегната $\bar{k}(O)$ (фиг. 1).

Твърдение 4. Ако кривата $\bar{k}(O)$ е парабола, то за всяка точка P от равнината на ΔABC кривата $\bar{c}_P$ е парабола, хомотетична на $\bar{k}(O)$ (фиг. 1).

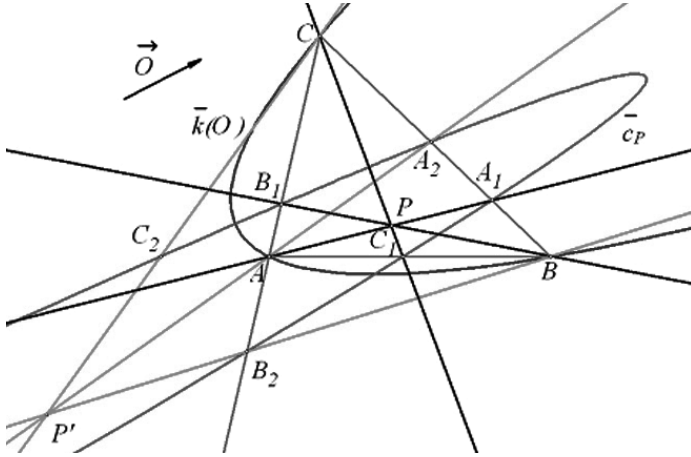
За да докажем тези твърдения, е достатъчно да забележим, че при използването на равенствата (9') уравнението (8) на $\bar{c}_P$ се записва във вида:

$$(18) \quad \begin{aligned} & \lambda\mu\nu(-\lambda+\mu+\nu)(\lambda-\mu+\nu)(\lambda+\mu-\nu) \times \\ & \times [(-x_0+y_0+z_0)x_0yz + (x_0-y_0+z_0)y_0zx + (x_0+y_0-z_0)z_0xy] - \\ & - (\mu\nu a'x + \nu\lambda b'y + \lambda\mu c'z)(x+y+z) = 0. \end{aligned}$$

Това уравнение е от вида

$$k. \left[(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 yz + (x_0 - y_0 + z_0)y_0 zx + (x_0 + y_0 - z_0)z_0 xy \right] + \\ + (a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z)(x + y + z) = 0.$$

Затова от резултатите за този вид криви, описани в (Гроздев & Ненков, 2014), се получават всички, формулирани по-горе, твърдения.



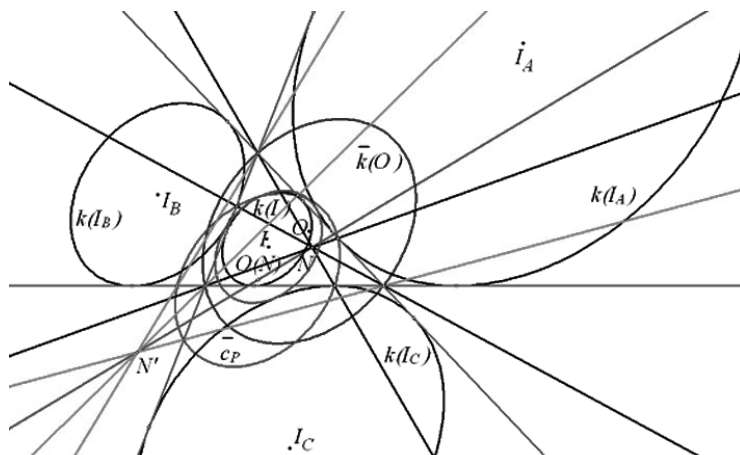
Фигура 4

4. Едно свойство на центъра на кривата на Чева за точка на Нагел. В общия случай, както лесно се забелязва с GSP, точките P , P' и $O(P)$ не лежат на една права. Тези точки лежат на една права точно когато е изпълнено равенството

$$(19) \quad \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ x_{P'} & y_{P'} & z_{P'} \\ x_{O(P)} & y_{O(P)} & z_{O(P)} \end{vmatrix} = 0.$$

Любопитно е да се открият някои забележителни точки P в равнината на $\triangle ABC$ при фиксирана крива $\bar{k}(O)$, които заедно със съответните им точки P' и $O(P)$ лежат на една права. Една от тези точки е медицентърът $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ на $\triangle ABC$. Кривата на Чева за G по отношение на произволна описана около $\triangle ABC$ крива $\bar{k}(O)$ е обобщение на окръжността на Ойлер за $\triangle ABC$, която наричаме *крива на Ойлер* за $\triangle ABC$, асоциирана с $\bar{k}(O)$. Кривата на Ойлер също принадлежи на Фойербаховата

конфигурация, определена от $\bar{k}(O)$. Освен това в (Nenkov, 2007) е отбелязано, че (според въведените по-горе означения) $O(G)$ е среда на отсечката GG' , т.е. G , G' и $O(G)$ лежат на една права.



Фигура 5

Други забележителни точки за Фойербаховата конфигурация, определена от $\bar{k}(O)$, са точките на Нагел. Едната точка на Нагел $N(1-2x_I, 1-2y_I, 1-2z_I)$ е пресечната точка на правите, свързващи върховете A , B и C със съответните допирни точки на $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$ със страните BC , CA и AB . По аналогичен начин се получават още три точки на Нагел

$$N_A \left(\frac{1}{1-2x_I}, \frac{2z_I-1}{1-2x_I}, \frac{2y_I-1}{1-2x_I} \right), N_B \left(\frac{2z_I-1}{1-2y_I}, \frac{1}{1-2y_I}, \frac{2x_I-1}{1-2y_I} \right),$$

$$N_C \left(\frac{2y_I-1}{1-2z_I}, \frac{2x_I-1}{1-2z_I}, \frac{1}{1-2z_I} \right).$$

Ще докажем, че точките N , N' и $O(N)$ лежат на една права. За останалите точки на Нагел това се получава, като заменим вписаната крива $k(I)$ с $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$. От (9'') и (13), при $\lambda = 1-2x_I$, $\mu = 1-2y_I$, $\nu = 1-2z_I$, получаваме равенствата

$$a' = 4x_I y_I z_I [4x_I y_I z_I - (1-2y_I)(1-2z_I)],$$

$$b' = 4x_I y_I z_I [4x_I y_I z_I - (1-2z_I)(1-2x_I)],$$

$$c' = 4x_I y_I z_I [4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)],$$

$$\tau = 16x_I^2 y_I^2 z_I^2 [48x_I^2 y_I^2 z_I^2 - 32x_I y_I z_I (y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) + 4(y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) - 1].$$

От тези равенства и (12) намираме координатите на N' във вида

$$x_{N'} = \frac{[4x_I y_I z_I - (1-2z_I)(1-2x_I)][4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)]}{48x_I^2 y_I^2 z_I^2 - 32x_I y_I z_I (y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) + 4(y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) - 1},$$

$$y_{N'} = \frac{[4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)][4x_I y_I z_I - (1-2y_I)(1-2z_I)]}{48x_I^2 y_I^2 z_I^2 - 32x_I y_I z_I (y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) + 4(y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) - 1},$$

$$z_{N'} = \frac{[4x_I y_I z_I - (1-2y_I)(1-2z_I)][4x_I y_I z_I - (1-2z_I)(1-2x_I)]}{48x_I^2 y_I^2 z_I^2 - 32x_I y_I z_I (y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) + 4(y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) - 1}.$$

От (4), (14) и (15) (15), при замените $a^2 \rightarrow x_I^2$, $b^2 \rightarrow y_I^2$, $c^2 \rightarrow z_I^2$, $16S^2 \rightarrow (1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)$, с помощта на програмата Maple намираме координатите на $O(N)$ във вида:

$$x_{O(N)} = \frac{x_I}{(1-2x_I)^2 (1-2y_I)^2 (1-2z_I)^2} \times$$

$$\times (-8y_I^4 z_I^2 - 8y_I^2 z_I^4 - 16y_I^3 z_I^3 - 8y_I^3 z_I^2 - 8y_I^2 z_I^3 + 28y_I^3 z_I + 28y_I z_I^3 + 64y_I^2 z_I^2 -$$

$$- 8y_I^3 - 8z_I^3 - 54y_I^2 z_I - 54y_I z_I^2 + 12y_I^2 + 12z_I^2 + 32y_I z_I - 6y_I - 6z_I + 1) =$$

$$= \frac{x_I}{(1-2x_I)^2 (1-2y_I)^2 (1-2z_I)^2} \times \{x_I (1-2x_I)^2 (1-2y_I)(1-2z_I) +$$

$$+ [(1-2y_I - 2z_I x_I)(1-2z_I - 2x_I y_I) - x_I (1-2y_I)(1-2z_I)](1-2x_I - 2y_I z_I)\},$$

$$y_{O(N)} = \frac{y_I}{(1-2x_I)^2 (1-2y_I)^2 (1-2z_I)^2} \times$$

$$\times (-8z_I^4 x_I^2 - 8z_I^2 x_I^4 - 16z_I^3 x_I^3 - 8z_I^3 x_I^2 - 8z_I^2 x_I^3 + 28z_I^3 x_I + 28z_I x_I^3 + 64z_I^2 x_I^2 -$$

$$- 8z_I^3 - 8x_I^3 - 54z_I^2 x_I - 54z_I x_I^2 + 12z_I^2 + 12x_I^2 + 32z_I x_I - 6z_I - 6x_I + 1) =$$

$$= \frac{y_I}{(1-2x_I)^2 (1-2y_I)^2 (1-2z_I)^2} \times \{y_I (1-2y_I)^2 (1-2z_I)(1-2x_I) +$$

$$+ [(1-2z_I - 2x_I y_I)(1-2x_I - 2y_I z_I) - y_I (1-2z_I)(1-2x_I)](1-2y_I - 2z_I x_I)\},$$

$$\begin{aligned}
 z_{O(N)} &= \frac{z_I}{(1-2x_I)^2(1-2y_I)^2(1-2z_I)^2} \times \\
 &\times (-8x_I^4y_I^2 - 8x_I^2y_I^4 - 16x_I^3y_I^3 - 8x_I^2y_I^2 - 8x_I^2y_I^3 + 28x_I^3y_I + 28x_Iy_I^3 + 64x_I^2y_I^2 - \\
 &- 8x_I^3 - 8y_I^3 - 54x_I^2y_I - 54x_Iy_I^2 + 12x_I^2 + 12y_I^2 + 32x_Iy_I - 6x_I - 6y_I + 1) = \\
 &= \frac{z_I}{(1-2x_I)^2(1-2y_I)^2(1-2z_I)^2} \times \left\{ z_I(1-2z_I)^2(1-2x_I)(1-2y_I) + \right. \\
 &\left. + [(1-2x_I-2y_Iz_I)(1-2y_I-2z_Ix_I) - z_I(1-2x_I)(1-2y_I)](1-2z_I-2x_Iy_I) \right\}.
 \end{aligned}$$

Въвеждаме означенията $\sigma_1 = x_I + y_I + z_I$, $\sigma_2 = y_Iz_I + z_Ix_I + x_Iy_I$, $\sigma_3 = x_Iy_Iz_I$. С помощта на програмата Maple пресмятаме детерминантата

$$\begin{aligned}
 \delta &= \begin{vmatrix} x_N & y_N & z_N \\ x_{N'} & y_{N'} & z_{N'} \\ x_{O(N)} & y_{O(N)} & z_{O(N)} \end{vmatrix} = \frac{16(y_I - z_I)(z_I - x_I)(x_I - y_I)}{(1-2x_I)^2(1-2y_I)^2(1-2z_I)^2} \times \\
 &\times \frac{(1-\sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 + 1)(24\sigma_3^2 - 8\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 16\sigma_2\sigma_3 + 30\sigma_3\sigma_1 - 2\sigma_1 + 4\sigma_2 - 24\sigma_3 + 1)}{48\sigma_3^2 - 32\sigma_2\sigma_3 + 4\sigma_2 - 1}.
 \end{aligned}$$

Тъй като $\sigma_1 = x_I + y_I + z_I = 1$, то $\delta = 0$. Последното равенство според (19) означава, че точките N , N' и $O(N)$ лежат на една права.

Накрая ще отбележим, че споменатото свойство на колинеарност е изпълнено за медицентъра на $\triangle ABC$ спрямо всяка описана около $\triangle ABC$ крива, а за точката на Нагел то е изпълнено само спрямо описаната крива, която поражда съответната Фойербахова конфигурация.

ЛИТЕРАТУРА

- Гроздев, С. & Ненков, В. (2014). Хомотетични конични сечения в равнината на триъгълник, *Математика и информатика*, 2, 139 – 154.
- Ненков, В. (2010). Няколко свойства на Фойербаховата конфигурация. *Математика и информатика*, 5, 42 – 61.
- Ненков, В. (2008) Обобщение на теоремата на Фойербах. *Математика и информатика*, 2, 35 – 42.
- Паскалев, Г. & Чобанов, Г. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.
- Хитов, Х. (1990). *Геометрия на триъгълника*. София: Народна просвета.
- Nenkov, V. (2007). Euler's Line and Euler's Curve Dependent by a Point. *New Trends*

in Mathematics and Informatics, Jubilee International Conference 60 years Institute of Mathematics and Informatics Bulgarian Academy Sciences, Abstracts, Sofia, Bulgaria 6-8 July, 48.

A CEVA CURVE FOR A POINT IN THE PLANE OF A TRIANGLE

Abstract. The paper describes a way to obtain conics, which are defined by an arbitrary circumscribed conic of a given triangle and a point in the plane of the triangle. Some properties of the obtained conics are noted.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**

Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College Lovech
31, Sajko Saev Street
Lovech, Bulgaria
vnenkov@mail.bg