

*If You Work with Young Students
Ако работите с малките ученици*

ИНВЕРСИЯТА – МЕТОД В НАЧАЛНАТА УЧИЛИЩНА МАТЕМАТИКА

¹Здравко Лалчев, ²Маргарита Върбанова

¹Софийски университет „Св. Климент Охридски“

²Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий“

Резюме. Авторите правят методическа адаптация на метода на инверсията за целите на обучението и представят неговите евристични възможности при решаване на „нестандартни“ задачи от началната училищна математика.

Keywords: primary school mathematics, inversion, transformation, mathematical model, chain diagram

Въведение

„...Инверсията е едно от най-любимите математически развлечения на индусите – както на старите, живели в отминали времена, така дори и на съвременните. И сега индуските деца умеят да решават наум твърде сложни задачи, съставени по метода на инверсията... Умножението става деление, делението се превръща в умножение: прирастът се обръща в загуба, загубата се преобразява в прираст: инверсия!!!“ (Еленски, 1967: 152).

Думите на автора на прекрасната книга ЛИЛАВАТИ – Шчепан Еленски, изказани в една от статиите в края на раздела **Интересни особености на числата и на аритметичните действия**, ни заинтригуваха и ние поискахме да научим повече неща за метода на „обръщането“. От историята на математиката узнаваме, че: „Задачата се решава от края, т.е. началното число за решението на задачата е числото, което се получава в резултат на операции над неизвестно число. Инверсията се състои в това, че над това число се извършват действия, обратни на тези, които са били извършени според условието на задачата над неизвестното число. Методът на инверсията е изложен от Арибхата, но неговото изложение е много кратко и за непосветения може да се окаже непонятно“ (Болгарский, 1979: 109).

В българската математическа литература от 80-години откриваме приложение на инверсията в книгата МАТЕМАТИЧЕСКИ ФОЛКЛОР, написана по идея на известния български математик и педагог проф. Иван Ганчев (1935 – 2012). На петнадесетина от поместените в книгата над 250 задачи народно творчество са

предложени и решения, построени по метода на инверсията. Авторите не назовават метода, но моделират задачите с граф-схеми, които са съставени от „точки и стрелка, насочена от числото, което се умножава, дели, събира или от което се изважда, към числото, което се получава“ (Ганчев, Чимев, Стоянов, 1986: 154).

Може би защото е останал в сянката на по-общия метод на уравненията или защото на него се гледа като на метод за решаване едва ли не само на занимателни задачи, методът на инверсията все още е малко популярен в обучението по математика у нас. Математическите модели на редица „състезателни“ задачи, построени на основата на уравнения (или система уравнения), обикновено водят до сложни алгебрични преобразувания, което ги прави неприложими, особено при обучението на малките ученици. Докато същите задачи допускат логически прости и технически кратки решения по метода на „обръщането“ и това ги прави по силите и на ученик от началните класове. При решаване на задачи по този метод схемата на разсъждения е „от края към началото“ и в това отношение инверсията напомня схемата на Пап за откриване на достатъчните условия за верността на отделните съждения. С тази разлика, че последователно в обратен ред се прилагат действия, обратни на описаните в текста на задачата, за да се достигне до търсеното число.

Обикновено в литературните източници и в практиката инверсията се представя като метод на обратните операции и същият се илюстрира с решаване на конкретни задачи, без да се показват теоретичните основи на метода. Но предварително е ясно, че инверсията (както и всеки друг метод) ефективно може да бъде прилагана, след като е била предмет на целенасочено изучаване в уроците по математика. Посочените съображения ни подтикнаха да представим на учителите един подход за овладяване на метода на инверсията, който с малки допълнения (и обяснения) може да бъде адаптиран и за обучението по математика в началните класове.

I. Аритметични преобразувания. Теоретична част.

Нашият опит в преподаване на инверсията като компонент от математически-те и методическите знания на студенти – бъдещи начални учители, ни дава увереност да твърдим, че е логически възможно и методически целесъобразно методът на инверсията да се разглежда като естествено продължение на понятието съставно преобразуване или по-конкретно като композиция на специални числови преобразувания, свързани с аритметичните операции, изучавани в началната училищна математика.

Елементарни аритметични преобразувания

От числовите релации важна роля в началната училищна математика играят специални числови преобразувания (биективни изображения в множеството на

естествените числа), свързани с първите четири аритметични действия – събиране, изваждане, умножение и деление, които ние за удобство нарекохме „аритметични“. В следващите редове ще представим по-подробно елементарните аритметични преобразувания, като изрично подчертаваме, че разглеждаме само случаи, при които аритметичните операции са изпълними.

Нека са дадени две множества (от естествени числа) A и B , като A е прието за първо и B – за второ. Ще разгледаме девет вида биективни числови изображения от множеството A към множеството B . Тъй като изображенията могат да бъдат интерпретирани като изображения на множеството на естествените числа в множеството на естествените числа, т.е. въпросните изображения по същество са преобразувания на множеството на числата, то ние предпочитаме вместо за изображения да говорим за преобразувания. И така, нека да започнем с дефиниции и примери на елементарните аритметични преобразувания.

1) Преобразувание, при което всеки елемент на второто множество е сбор на съответния елемент от първото множеството и едно и също (постоянно) число a наричаме „събиране на a “ и означаваме с $(+a)$. Например преобразуванието, представено на сх. 1, е „събиране на 12“, т.е. $(+12)$.

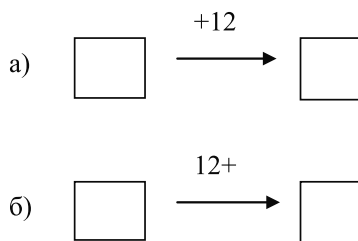
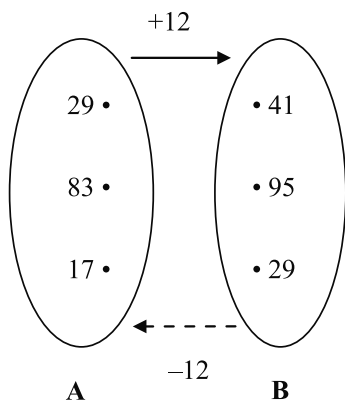


Схема 1

В много случаи (най-често практически ситуации) преобразуванието „събиране на a “ е математически модел на действия или релации, изказвани с думи (синоними) като „прибавяне на a “, „увеличаване с a “, „с a повече от“.

2) Преобразувание, при което всеки елемент на второто множество е сбор на едно и също (постоянното) число a и съответния елемент от първото множеството, наричаме „събиране към a “ и означаваме с $(a+)$. Например преобразуванието, представено на сх. 1, може да се интерпретира и като „събиране към 12“, т.е. $(12+)$.

По-общо казано, ако a е постоянно число, x е число от множеството A и y е число от множеството B , то y е образ на x при преобразуването „събиране към a “ тогава и само тогава, когато $y = a + x$. За целите на обучението е подходящо преобразуването „събиране към a “ да бъде моделирано с диаграма от „две квадратчета и една стрелка“, както е показано на сх. 1.

(Забележка. Известно е, че операцията събиране на естествени числа е комутативна и по тази причина преобразуванията „събиране към a “ и „събиране на a “ от математическа гледна точка са тъждествени. Това обстоятелство прави формално излишно изучаването на едното от двете преобразувания. Но ние намираме, че за учебни цели е удачно да се отделят двете преобразувания. По този начин се осигурява и адекватен математически модел за описване на практически ситуации, които са изказани с думите „прибавяне към a “, „присъединяване към a “.)

3) Преобразуване, при което всеки елемент на второто множество е разлика на съответния елемент от първото множеството и едно и също (постоянното) число a , наричаме „изваждане на a “ и означаваме с $(-a)$. Например преобразуването, представено на сх. 2., е „изваждане на 15“, т.е. (-15) .

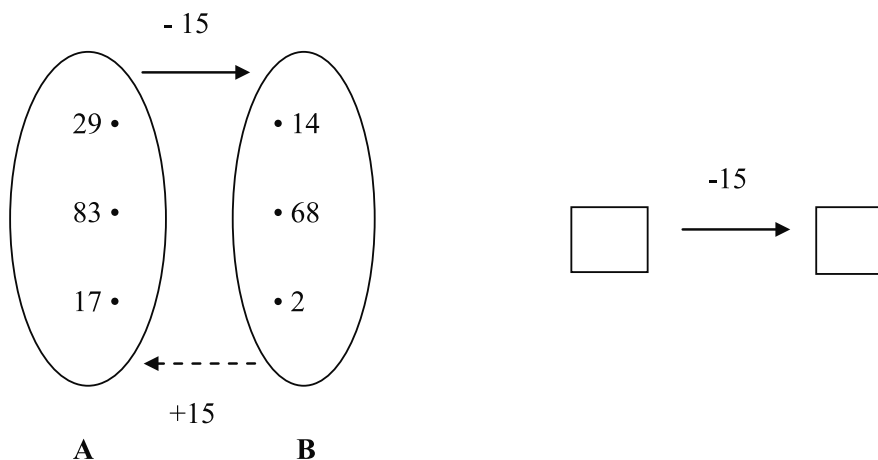


Схема 2

По-общо казано, ако a е постоянно число, x е число от множеството A и y е число от множеството B , то y е образ на x при преобразуването „изваждане на a “ тогава и само тогава, когато $y = x - a$. За целите на обучението е подходящо преобразуването „изваждане на a “ да бъде моделирано с диаграма от „две квадратчета и една стрелка“, както е показано на сх. 2.

В много случаи (най-често практически ситуации) преобразуването „изваждане на a “ е математически модел на действия или релации, изказвани с думи (синоними) като „намаляване с a “ или „с a по-малко от“.

4) Преобразуване, при което всеки елемент на второто множество е разлика на едно и също (постоянното) число a и съответния елемент от първото множество, наричаме „изваждане от a “ и означаваме с $(a-)$. Например преобразуването на сх. 3 е „изваждане от 50“, т.е. $(50-)$.

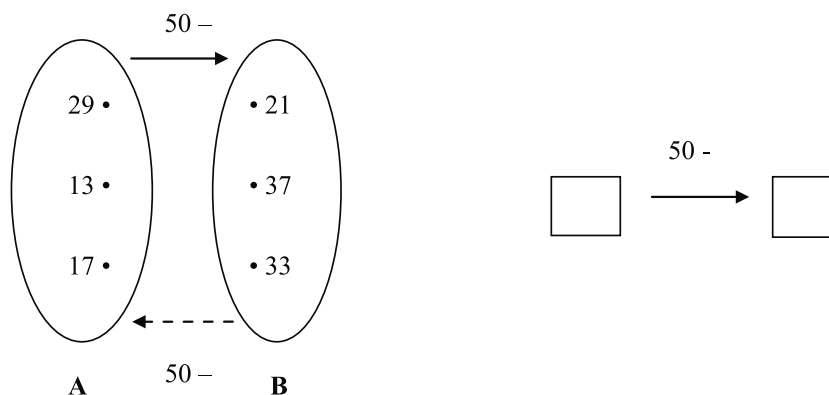


Схема 3

По-общо казано, ако a е постоянно число, x е число от множеството A и y е число от множеството B , то y е образ на x при преобразуването „изваждане от a “ тогава и само тогава, когато $y = a - x$. За целите на обучението е подходящо преобразуването „изваждане от a “ да бъде моделирано с диаграма от „две квадратчета и една стрелка“, както е показано на сх. 3.

В много случаи (най-често практически ситуации) преобразуването „изваждане от a “ е математически модел на действия или релации, изказвани с думи (синоними) като „допълване (адитивно) до a “.

5) Преобразуване, при което всеки елемент на второто множество е произведение на съответния елемент от първото множество и едно и също (постоянното) число a , наричаме „умножение на a “ и означаваме с $(.a)$. Например преобразуването на сх. 4, е „умножение на 6“, т.е. $(.6)$.

По-общо казано, ако a е постоянно число, x е число от множеството A и y е число от множеството B , то y е образ на x при преобразуването „умножение на a “ тогава и само тогава, когато $y = x \cdot a$. За целите на обучението е подходящо преобразуването „умножение на a “ да бъде моделирано с диаграма от „две квадратчета и една стрелка“, както е показано на сх. 4.

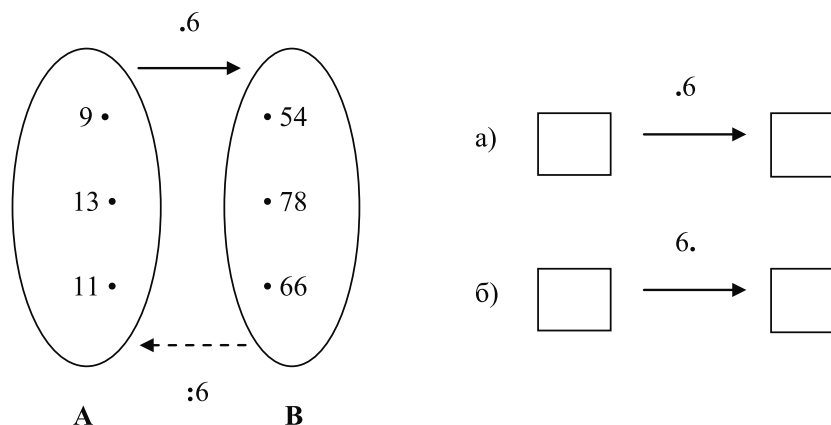


Схема 4

В много случаи (най-често практически ситуации) преобразуването „умножение на a “ е математически модел на действия или релации, изказвани с думи (синоними) като „увеличаване a пъти“ или „ a пъти повече“.

6) Преобразуване, при което всеки елемент на второто множество е произведение на едно и също (постоянно) число a и съответния елемент от първото множество, наричаме „умножение с a “ и означаваме с $(a.)$ Например преобразуването, представено на сх. 4, може да се интерпретира и като преобразуване „умножение с 6“, т.е. $(6.)$.

По-общо казано, ако a е постоянно число, x е число от множеството A и y е число от множеството B, то y е образ на x при преобразуването „умножение с a “ тогава и само тогава, когато $y = a \cdot x$. За целите на обучението е подходящо преобразуването „умножение с a “ да бъде моделирано с диаграма от „две квадратчета и една стрелка“, както е показано на сх. 4.

(Забележка. Известно е, че операцията умножение на естествени числа е комутативна и по тази причина преобразуванията „умножение на a “ и „умножение с a “ от математическа гледна точка са тъждествени. Това обстоятелство прави формално излишно изучаването на едното от двете преобразувания. Но ние намираме, че за учебни цели е удачно да се отделят двете преобразувания. По този начин се осигурява и адекватен математически модел за описване на практически ситуации, които са изказани с думите „умножение по a “.)

7) Преобразуване, при което всеки елемент на второто множество е частно на съответния елемент от първото множество и едно и също (постоянното) число a , наричаме „деление на a “ и означаваме с $(:a)$. Например преобразуването, показано на сх. 5, е „деление на 7“, т.е. $(:7)$

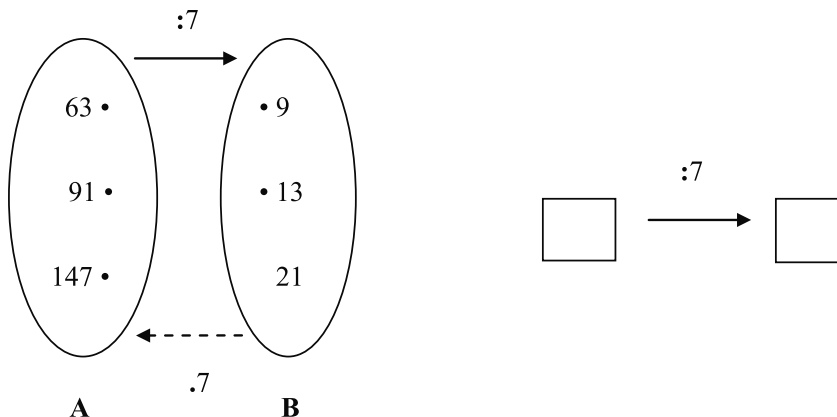


Схема 5

По-общо казано, ако a е постоянно число, x е число от множеството A и y е число от множеството B , то y е образ на x при преобразуването „деление на a “ тогава и само тогава, когато $y = x : a$. За целите на обучението е подходящо преобразуването „деление на a “ да бъде моделирано с диаграма от „две квадратчета и една стрелка“, както е показано на сх. 5.

В много случаи (най-често практически ситуации) преобразуването „умножение на a “ е математически модел на действия или релации, изказвани с думи (синоними) като „намаляване a пъти“ или „ a пъти по-малко“.

8) Преобразуване, при което всеки елемент на второто множество е частно на едно и също (постоянно) число a и съответния елемент от първото множество, наричаме „деление от a “ и означаваме с $(a:)$. Например преобразуването на сх. 6 е „деление от 60“, т.е. $(60:)$.

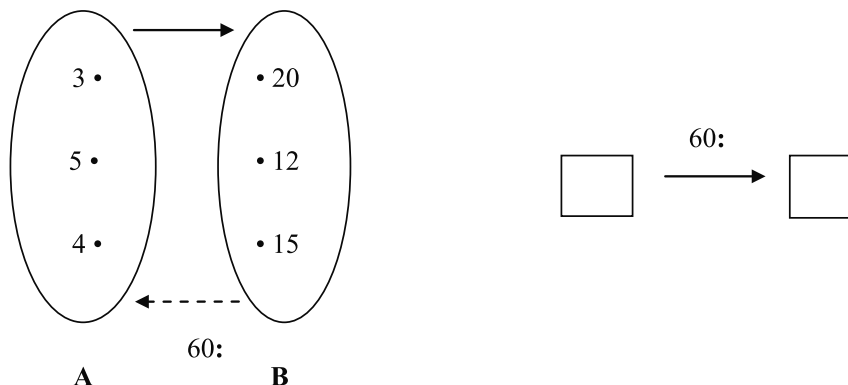


Схема 6

По-общо казано, ако a е постоянно число, x е число от множеството A и y е число от множеството B , то y е образ на x при преобразуването „деление от a “ тогава и само тогава, когато $y = a : x$. За целите на обучението е подходящо преобразуването „деление от a “ да бъде моделирано с диаграма от „две квадратчета и една стрелка“, както е показано на сх. 6.

В много случаи (най-често практически ситуации) преобразуването „деление от a “ е математически модел на действия или релации, изказвани с думи (синоними) като „допълване (мултипликативно) до a “.

За пълнота към посочените 8 преобразувания добавяме още едно – преобразуването „равно на“ (сх. 7), което означаваме по традиционния начин с $(=)$. На сх. 7 е представено преобразуването „равно на“, т.е. $(=)$.

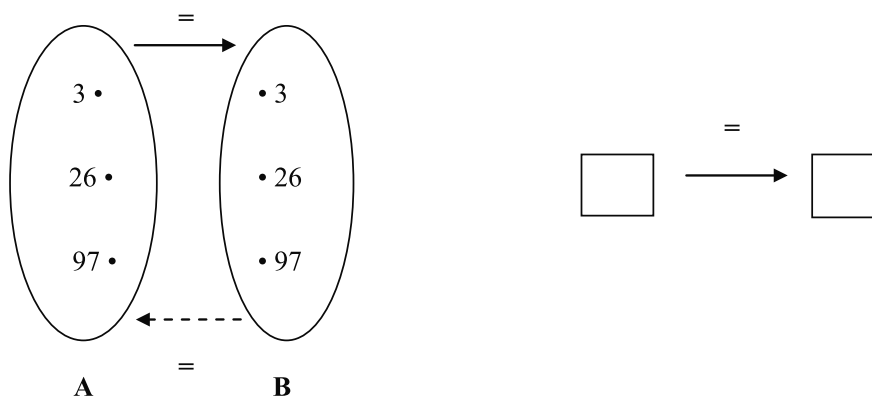


Схема 7

По-общо казано, ако x е число от множеството A и y е число от множеството B , то y е образ на x при преобразуването „равно на“ тогава и само тогава, когато $y = x$. За целите на обучението е подходящо преобразуването „равно на“ да бъде моделирано с диаграма от „две квадратчета и една стрелка“, както е показано на сх. 7.

По-горе представените девет преобразувания са основни в училищната аритметика и „пронизват“ изцяло, явно или неявно, математиката в началните класове. Това ни дава основание да ги наречем **елементарни аритметични преобразувания**.

Обратни аритметични преобразувания

Разгледаните аритметични преобразувания посочват начина за „преминаване“ от първото множество A към второто множество B и затова се наричат **прави**

преобразувания. За метода на инверсията е необходимо да бъдат изведени и **обратните** преобразувания, т.е. преобразуванията, които посочват начина за „въртане“ от второто множество В към първото множество А. За целта да се върнем към всяко от преобразуванията поотделно и да „обърнем“ посоката на стрелките.

1а) За да намерим обратното преобразувание на „събиране на a “, обръщаме посоката на стрелките на сх. 1 и получаваме преобразуванието на сх. 1а. Става ясно, че обратното преобразувание на „събиране на 12“ е „изваждане на 12“, т.е. (-12) .

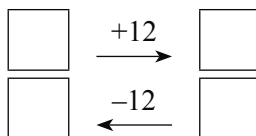


Схема 1а

И така, обратното преобразувание на „събиране на a “ е „изваждане на a “, т.е.

$$(+a) \quad - \quad (-a).$$

2а) За да намерим обратното преобразувание на „събиране към a “, обръщаме посоката на стрелките на сх. 1 и получаваме преобразуванието на сх. 1а. Става ясно, че обратното преобразувание на „събиране към 10“ е „изваждане на 10“, т.е. (-10) .

И така, обратното преобразувание на „събиране към a “ е „изваждане на a “, т.е.

$$(a +) \quad - \quad (-a).$$

3а) За да намерим обратното преобразувание на „изваждане на a “, обръщаме посоката на стрелките на сх. 2 и получаваме преобразуванието на сх. 2а. Става ясно, че обратното преобразувание на „изваждане на 15“ е „събиране на 15“, т.е. $(+15)$.

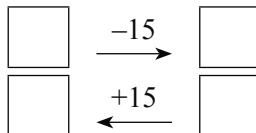


Схема 2а

И така, обратното преобразуване на „изваждане на a “ е „събиране на a “, т.е.

$$(-a) \quad - \quad (+a).$$

4а) За да намерим обратното преобразуване на „изваждане от a “, обръщаме посоката на стрелките на сх. 3 и получаваме преобразуванието на сх. 3а. Става ясно, че обратното преобразуване на „изваждане от 50“ е „изваждане от 50“, т.е. (50 –).

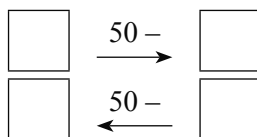


Схема 3а

И така, обратното преобразуване на „изваждане от a “ е „изваждане от a “, т.е.

$$(a-) \quad - \quad (a-).$$

5а) За да намерим обратното преобразуване на „умножение на a “, обръщаме посоката на стрелките на сх. 4 и получаваме преобразуванието на сх. 4а. Става ясно, че обратното преобразуване на „умножение на 6“ е „деление на 6“, т.е. (: 6).

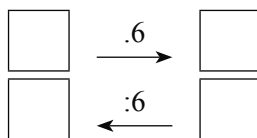


Схема 4а

И така, обратното преобразуване на „умножение на a “ е „деление на a “, т.е.

$$(.a) \quad - \quad (:a).$$

6а) За да намерим обратното преобразуване на „умножение с a “, обръщаме посоката на стрелките на сх. 4 и получаваме преобразуванието на сх. 4а. Става ясно, че обратното преобразуване на „умножение с 8“ е „деление на 8“, т.е. (: 8).

И така, обратното преобразуване на „умножение на a “ е „деление на a “, т.е.

$$(a.) \quad - \quad (:a).$$

7а) За да намерим обратното преобразуване на „деление на a “, обръщаме посоката на стрелките на сх. 5 и получаваме преобразуванието на сх. 5а. Става ясно, че обратното преобразуване на „деление на 8“ е „умножение на 8“, т.е. ($\cdot 8$).

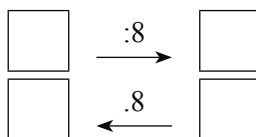


Схема 5а

И така, обратното преобразуване на „деление на a “ е „умножение на a “, т.е.

$$(:a) \quad - \quad (\cdot a)$$

8а) За да намерим обратното преобразуване на „деление от a “, обръщаме посоката на стрелките на сх. 8 и получаваме преобразуванието на сх. 8а. Става ясно, че обратното преобразуване на „деление от 60“ е „деление от 60“, т.е. ($60:$).

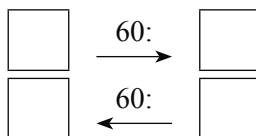


Схема 8а

И така, обратното преобразуване на „деление от a “ е „деление от a “, т.е.

$$(a:) \quad - \quad (a:).$$

9а) За да намерим обратното преобразуване на „равно на a “, обръщаме посоката на стрелките на сх. 7 и получаваме преобразуванието на сх. 7а. Става ясно, че обратното преобразуване на „равно на“ е „равно на“, т.е. ($=$), т.е.

$$(=) \quad - \quad (=)$$

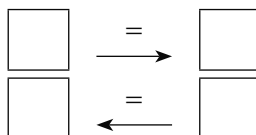


Схема 7а

Съставни преобразувания. Композиция на преобразувания

В приложната част на разработката, предмет на нашето изследване, ще бъдат задачи, при които върху едно или повече числа „действат“ последователно в определен ред две или повече преобразувания. Това означава, че върху числото (числата) „действа“ **съставно преобразуване**. Всяко съставно преобразуване може да се разглежда като резултат от последователното „действие“ на елементарни преобразувания. Ето защо ще обърнем внимание на понятието **композиция** на преобразувания. Да разгледаме следната ситуация.

Да вземем едно число (първообраз). Да умножим числото на 2. Към полученото да прибавим 32. Полученото да разделим на 7. В резултат на указаните преобразувания от даденото число получаваме число (образ). Например, ако вземем в началото числото 12, в края ще получим числото 8.

В описаната ситуация избраното число е подложено на преобразуване, съставено от елементарните преобразувания $(\cdot 2)$, $(+32)$, $(:7)$. Преобразуванието, получено в резултат на последователното прилагане на преобразуванията $(\cdot 2)$, $(+32)$, $(:7)$, ще наричаме **композиция** на тези преобразувания.

Композицията на аритметични преобразувания е удобно да бъде моделирана чрез верижна диаграма, като е показано на сх. 8. Диаграмата съдържа два типа символи – квадратчета и стрелки. Квадратчетата са за числовите данни, а стрелките – за преобразуванията. В случая съставното преобразуване (композицията) съдържа 3 елементарни преобразувания. Затова диаграмата съдържа три стрелки (със съответните знаци) и четири (с едно повече от стрелките) квадратчета, съответно за числата, участващи в композицията. (Първото квадратче е за числото, от което започва преобразуванието.)

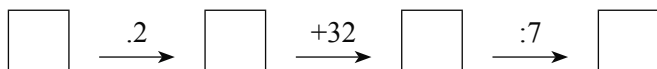


Схема 8

Често пъти за постигане на повече компактност и удобство верижната диаграма може да бъде заменена с таблица (с един ред), както е показано на сх. 9. В таблицата-ред първата клетка съдържа информация за число, втората съдържа информация за преобразуване, третата съдържа информация за число и т.н., клетката за преобразуване следва клетката за число.

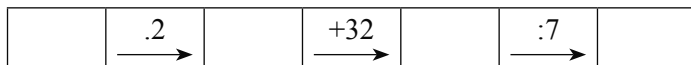


Схема 9

Намиране на част от число

За успешното решаване на задачи по метода на инверсията е необходимо да се интерпретира и аритметичното „действие“ „намиране на част от число“ като аритметично преобразуване. В тази връзка е важно да обърнем внимание, че „една втора от“ (половинка), „една трета от“ (третинка), „една четвърт от“ (четвъртинка) и т.н. могат да се интерпретират като „делено на 2“ ($:2$), „делено на 3“ ($:3$), „делено на 4“ ($:4$) и т.н. Също така е важно да отбележим, че частите „две трети от“, „две четвърти от“, „три четвърти от“ се интерпретират като „две третинки“, „две четвъртинки“, „три четвъртинки“ и т.н. Това означава, че на езика на аритметичните преобразувания „две трети от“, „две четвърти от“, „три четвърти от“ са композиции съответно на „делено на 3 и умножено на 2“, „делено на 4 и умножено на 2“, „делено на 4 и умножено на 3“, сх.10.

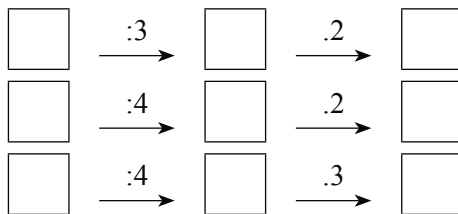


Схема 10

Обратно преобразуване на композиция от преобразувания

За успешното решаване на задачи, при които е известен „краят“, а се търси „началото“, е необходимо да се знае как се „обръща“ композицията от преобразувания. И точно в това „обръщане“ се крие същността на метода на инверсията. Казано по друг начин, необходимо е да се намери обратното преобразуване на композиция от преобразувания. Възможността за „обръщане“ на композицията се съдържа в теоремата: **Обратното преобразуване на композиция от преобразувания е композиция от обратните преобразувания, взети в обратен ред.**

Пример. Композицията от преобразувания:

„умножено на 2, събрано с 32, разделено на 7, допълнено до 100“

след „обръщане“ се превърща в следната композиция:

„допълнено до 100, умножено на 7, извадено на 32, делено на 2“.

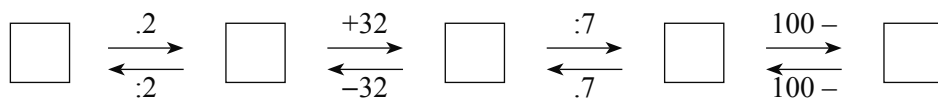


Схема 11

На сх. 11 е представена композицията и нейното обратно преобразуване (обърната композиция) чрез верижна диаграма.

На сх. 12 е представена композицията и нейното обратно преобразуване чрез табличен ред.

	$\xrightarrow{.2}$		$\xrightarrow{+32}$		$\xrightarrow{:7}$		$\xrightarrow{100 -}$	
	$\xleftarrow{:2}$		$\xleftarrow{-32}$		$\xleftarrow{.7}$		$\xleftarrow{100 -}$	

Схема 12

Методът на инверсията

В тази част на статията ще разгледаме проблемни ситуации, чиито структури, най-общо казано, са съставени от три компонента – числово множество А, числово множество В и еднозначна релация (преобразуване) R, която преобразува числата на множеството А в числата на множеството В. Ситуацията може да се превърне в „задачова“ по три начина – (1) известни са множеството А и релацията R, търси се множеството В; (2) известни са множеството В и релацията R, търси се множеството А; (3) известни са множествата А и В, търси се релацията R (сх. 13).

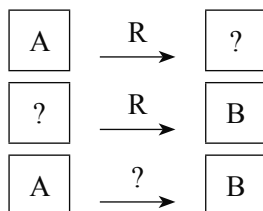


Схема 13

Целта на настоящата статия са задачи от тип (2). Тъй като задачите от тип (2) са тясно свързани със задачите от тип (1), то задачите от тип (1) ще наречем **прави задачи**, а задачите от тип (2) – **обратни задачи**. И така, задачите, при които е из-

вестно „началото“ и се търси „краят“, са прави, а задачите, при които е известен „краят“ и се търси „началото“, са обратни.

Когато решаваме права задача (известни са множеството А и релацията R, неизвестно е множеството В), за да намерим множеството В, достатъчно е (след като построим математическия модел на задачата – верижна диаграма от квадратчета и стрелки) да извършим заложените в модела преобразувания, (започвайки от А) в съответния ред и така ще достигнем до множеството В.

Когато решаваме обратна задача (известни са множеството В и релацията R, неизвестно е множеството А), за да намерим множеството А, е необходимо (след като построим математическия модел на задачата – верижна диаграма от квадратчета и стрелки) да извършим обратните на заложените в модела преобразувания (започвайки от В) в обратен ред и така ще стигнем до множеството А.

За да представим по-конкретно метода на инверсията, ще разгледаме подробно решенията на две задачи, които са права и обратна.

Задача 1 (права). Кое число ще се получи, ако умножим числото 12 по 2, полученото число извадим от 100, полученото число разделим на 4, полученото число прибавим към числото 3 и разделим числото 88 на полученото число?

Задача 2 (обратна). Кое е числото, което, след като се умножи по 2, полученото число се извади от 100, полученото число се раздели на 4, полученото число се прибави към числото 3 и след като числото 88 се раздели на полученото, се получава 4.

Решение

1. Построяваме математически модели на задачите. Тъй като в описаните ситуации има два вида обекти – числа (първообрази и образи) и преобразувания (аритметични), то моделите ще съдържат два вида символи – квадратчета и стрелки (с означения). Квадратчето, което представя число-образ, „следва“ стрелката, а квадратчето, което е число-първообраз, „предхожда“ стрелката. След като наредим квадратчетата и стрелките, следвайки текста на задачата, ние получаваме „верижната“ диаграма на текста на задачата.

1.1. „Верижката“ на задача 1 съдържа шест квадратчета, (първото от които е запълнено с числото 12, а останалите са празни) и 5 стрелки – за преобразуванията: *умножение на 2* (.2), *изваждане от 100* (100 –), *деление на 4* (:4), *събиране на 3* (3+), *деление от 88* (88:) (сх.14).

1.2. „Верижката“ на задача 2 съдържа шест квадратчета (последното, от които е запълнено с числото 4, а останалите са празни) и 5 стрелки – за преобразуванията: *умножение на 2* (.2), *изваждане от 100* (100 –), *деление на 4* (:4), *събиране на 3* (3+), *деление от 88* (88:) (сх.15)

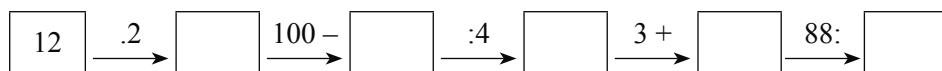


Схема 14

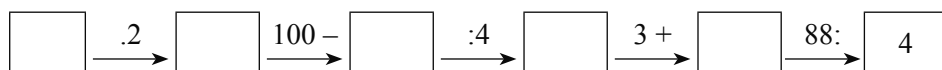


Схема 15

2. Преобразуваме математическите модели на задачите

2.1. Изпълняваме последователно действията, заложили в модела, като започваме от първото квадратче (числото 12) и спазваме последователността на преобразуванията: *умножение на 2* ($\cdot 2$), *изваждане от 100* ($100 -$), *деление на 4* ($:4$), *събиране на 3* ($3 +$), *деление от 88* ($88 :$) (сх.14а).

2.2. Заменяме всяко от преобразуванията с неговото обратно и обръщаме реда на преобразуванията (започваме изчислителните действия от числото 4, което е в последното квадратче) и спазваме последователността на обратните преобразувания: *деление от 88* ($88 :$), *изваждане на 3* (-3), *умножение на 4* ($\cdot 4$), *изваждане от 100* ($100 -$), *деление на 2* ($:2$) (сх. 15а)

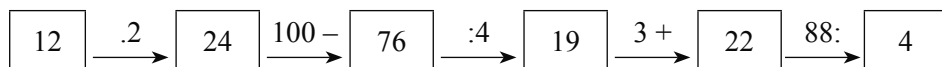


Схема 14а

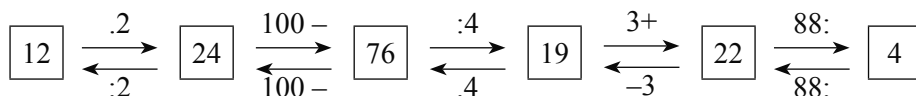


Схема 15а

3. Интерпретация на отговорите, получени в резултат на „обработката“ на моделите.

3.1. След като сме изпълнили действията от т. 2, достигаме до числото в последното квадратче, т.е. до числото 4. Числото 4 е търсеното число.

3.2. След като сме изпълнили действията от т. 2, достигаме до числото в първото квадратче, т.е. до числото 12. Числото 12 е търсеното число.

Нека да представим казаното по-горе в обобщен вид. При решаване на задачи по метода на инверсията е целесъобразно да се следва схемата:

1) **Построяваме математически модел** на задачата. Това ще рече, че е необходимо информацията от текста на задачата „да се преведе“ на езика на аритметичните преобразувания и да се построи „верижката“ („верижките“) от квадратчетата и стрелки. За числовите данни се отделят квадратчетата, а за преобразуванията – стрелки. Квадратчетата, чиито числени стойности са известни, се попълват със съответните числа. Онези квадратчетата, чиито числени стойности са неизвестни, остават празни. Преобразуванията се изобразяват чрез стрелки, над които има съкратен запис на преобразуванието. Стрелките, които отговарят на неизвестни преобразувания, са без надпис.

2) **Преобразуваме модела** с цел да запълним празните квадратчетата със съответните числа.

Ако задачата е права, то запълването на празните квадратчетата, започва от първото квадратче и се изпълняват действията, указани от стрелките в посочения ред.

Ако задачата е обратна, то отначало се обръщат преобразуванията и след това запълването на празните квадратчетата започва от последното квадратче и продължава в обратен ред, като се спазват съответните обратни преобразувания.

3) **Интерпретираме отговора**, получен в резултат на преобразуването на модела. Запълването и на последното квадратче означава, че задачата е решена и отговорът е получен. След което този отговор се интерпретира на езика на текста на задачата.

II. Задачи. Практическа част

В тази точка ще илюстрираме метода на инверсията с решаването на конкретни задачи. Нашето виждане е, че от методическа гледна точка е целесъобразно задачите да бъдат разделени на групи в зависимост от броя на елементите на множеството, подложено на преобразувания. За целта ние разделихме задачите на две големи групи – задачи, в които множеството съдържа един елемент, и задачи, в които множеството съдържа повече от един елемент. Във всяка от групите са оформени подгрупи от задачи, описващи различни ситуации. Задачите, които представят новите ситуации, са придружени от авторски решения по метода на инверсията, а останалите могат да служат за упражнение с цел усвояване на метода. Математическият инструментариум, който се използва в решаването на задачите, е в рамките на началната училищна математика – работи се с естествени числа. (Забележка. В текста на някои задачи, от формална гледна точка, измежду числовите данни има такива, чийто математически модел са обикновени дроби.

Но в случая дробите са свързани с конкретна практическа ситуация и това позволява тяхната интерпретация да бъде на конкретно предметно ниво, което позволява и действията с тях да бъдат на това ниво. Впрочем подобни „дробни“ ситуации могат да послужат като мотив за по-ранно (в началните класове) изучаване на елементарни свойства на дробите.)

А) Първа група задачи (множеството, чиито елементи са подложени на преобразувания, съдържа само едно число)

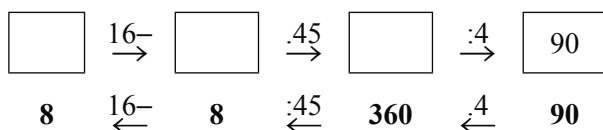
Задача 1. Намислих едно число. Извадих намисленото число от 16, получено-то умножих по 45, полученото разделих на 4. Получих 90. Кое число съм намислил?

Решение

1. Построяваме математическия модел на задачата (верижна диаграма от квадратчета и стрелки).

На действията, описани в текста на задачата, съответства композиция от 3 аритметични преобразувания („изваждане от 16“, „умножение на 45“ и „деление на 4“). Композицията може бъде представена чрез таблица, съставена от 7 квадратчета, наредени едно до друго на един ред. Първото квадратче е празно (за намисленото число), второто е за преобразуването ($\overset{16}{\rightarrow}$), третото е празно (за образа на намисленото число при преобразуването ($\overset{16}{\rightarrow}$)), четвъртото е за преобразуването ($\overset{45}{\rightarrow}$), петото квадратче е празно (за образа на предишното число при преобразуването ($\overset{45}{\rightarrow}$)), шестото квадратче е за преобразуването ($\overset{4}{\rightarrow}$) и седмото квадратче е за полученото число (числото 90).

(Моделът е представен в първи ред на таблицата.)



2. Преобразуваме модела с цел да попълним празните квадратчета.

В построения модел последното квадратче е запълнено (известно). Целта е да се запълни първото квадратче (което е празно). Това може да стане, като се намери образът на числото 90 при композицията от обратните преобразувания, взети в обратен ред. Това означава, че отначало се намира образът на числото 90 при преобразуването „умножение на 4“ (числото 360), след това се намира образът

на числото 360 при преобразуването „деление на 45“ (числото 8), след това се намира образът на числото 8 при преобразуването „изваждане от 16“ (числото 8).

(Инверсията („обратното придвижване“ от края към началото) е представена във втори ред на таблицата.)

С това задачата е решена.

Отговор. Намисленото число е 8.

Задача 2. Намислих едно число, умножих го по 7, прибавих 31, полученото извадих от 100, полученото разделих на 5, полученото умножих по 16, от полученото извадих 50, числото 98 разделих на полученото. Получих 7. Кое число съм намислил? (Лалчев, 2009: 16)

Отговор: 7.

Задача 3. Намислих едно число. Умножих намисленото число по 4, извадих полученото от 100, разделих полученото на 7, към полученото прибавих 76, полученото разделих на 5, полученото извадих от 90, полученото разделих на 2, от полученото извадих 27. Получих 10. Кое число съм намислил?

Отговор: 18.

Задача 4. Един човек искал бързо и лесно да спечели пари, но не заел как и затова отишъл при дявола за съвет (при лихваря за бърз кредит). Тогава дяволът посочил близката река и казал: „Аз ще направя така, че всеки път, като минаваш през реката, парите, които имаш, да се удвояват, но за съвета след всяко преминаване ще да ми изплащаш по 24 лева.“

Без много да му мисли, човекът приел предложението и започнал да преминава през реката. След първото преминаване парите на човека се удвоили и той се издължил на дявола. След второто преминаване парите отново се удвоили и човекът отново се издължил. След третото преминаване се случило същото. След като се издължил и третия път, човекът решил да провери колко са парите, които вече има, и бръкнал в джоба да провери.

За голямо свое учудване човекът установил, че в този момент той няма нито лев. Колко пари е имал човекът, преди да приеме съвета на дявола? (Задача от народното творчество) (Лалчев, 2009: 16).

Решение. Ситуацията, описана в текста на задачата, може да бъде моделирана с композиция от 6 преобразувания: „умножение на 2“, „изваждане на 24“, „умножение на 2“, „изваждане на 24“, „умножение на 2“, „изваждане на 24“. Резултатът от тези преобразувания е числото 0. Моделът на задачата е представен в първи ред на таблицата, а преобразуването на модела е представено във втория ред на таблицата.

	$\xrightarrow{.2}$		$\xrightarrow{-24}$		$\xrightarrow{.2}$		$\xrightarrow{-24}$		$\xrightarrow{.2}$		$\xrightarrow{-24}$	0
21	$\xleftarrow{:2}$	42	$\xleftarrow{+24}$	18	$\xleftarrow{:2}$	36	$\xleftarrow{+24}$	12	$\xleftarrow{:2}$	24	$\xleftarrow{+24}$	0

Отговор. Човекът е имал 21 лева.

Задача 5. Ябълкова градина е оградена с три огради. Всяка ограда има врата, на която стои пазач. Всеки, който излиза от градината, оставя на пазача на всяка врата половината от ябълките, които носи и още една ябълка. Колко ябълки трябва да наберере човек, за да може, след като излезе от градината, да носи със себе си една ябълка? (Задача от народното творчество) (Лалчев, 2009: 16)

Отговор: 22.

Задача 6. В кварталния минимаркет доставили яйца. Първият купувач купил половината от яйцата и още едно яйце. Вторият купувач купил половината от останалите и още едно. Третият купувач купил половината от останалите и още едно. Четвъртият купувач купил половината от останалите и още едно. Тогава яйцата свършили. Колко яйца са били доставени?

Отговор: 30.

Задача 7. За новогодишните празници майка отделила известна сума пари, която да раздаде или похарчи за подаръци на четирите си деца. На първото дете дала един лев, подарък за половината от останалите пари и още 2 лева. На второто дете дала 2 лева, подарък за половината от останалите пари и още 3 лева. На третото дете дала 3 лева, подарък за половината от останалите пари и още 4 лева. Четвъртото дете получило 4 лева, подарък за половината от останалите пари и още 5 лева. Накрая останали 3 лева. Колко лева е отделила майката за своите деца?

Отговор: 225.

Задача 8. Трима рибари заедно ловили риба и я поставяли в един общ съд. Стъмнило се и те, уморени, заспали. След известно време единият от тях се събудил и решил да си отиде вкъщи без да буди другите. За тази цел той се опитал да раздели рибите на три равни части, но се оказало, че една риба е в повече. Тогава той изхвърлил една риба от кошницата и останалите разделил на 3 равни части, две части върнал в кошницата и една част взел със себе си. След известно време се събудил вторият рибар и решил да си вземе своя дял и да си отиде вкъщи, без да знае, че първият вече го е сторил. За тази цел той се опитал да раздели рибите на три равни части, но се оказало, че една риба е в повече. Тогава той изхвърлил една риба от кошницата и останалите разделил на 3 равни части, две части върнал

в кошницата и една част взел със себе си. След известно време се събудил третият рибар и той постъпил по същия начин, както първия и втория. След като и третият рибар си заминал, в кошницата останали 6 риби. Колко са били уловените в началото риби? (Задача от народното творчество) (Лалчев, 2009: 17).

Решение. Ситуацията, описана в текста на задачата, може да бъде моделирана с композиция от 9 преобразувания, първите три от които („изваждане на 1“, „деление на 3“, „умножение на 2“) са извършени от първия рибар, вторите три от които („изваждане на 1“, „деление на 3“, „умножение на 2“) са извършени от втория рибар и последните три („изваждане на 1“, „деление на 3“, „умножение на 2“) са извършени от третия рибар. Резултатът от тези преобразувания е числото 6.

Моделът на задачата е представен в първия ред на таблицата, а преобразуването на модела е представено във втория ред на таблицата.

	$\xrightarrow{-1}$		$\xrightarrow{:3}$		$\xrightarrow{\cdot 2}$		$\xrightarrow{-1}$		$\xrightarrow{:3}$		$\xrightarrow{\cdot 2}$		$\xrightarrow{-1}$		$\xrightarrow{:3}$		$\xrightarrow{\cdot 2}$	6
25	$\xleftarrow{+1}$	24	$\xleftarrow{\cdot 3}$	8	$\xleftarrow{:2}$	16	$\xleftarrow{+1}$	15	$\xleftarrow{\cdot 3}$	5	$\xleftarrow{:2}$	10	$\xleftarrow{+1}$	9	$\xleftarrow{\cdot 3}$	3	$\xleftarrow{:2}$	6

Отговор. Уловените риби са били 25.

Задача 9. Намислих едно число. От него извадих 4 и полученото разделих на 3. От частното извадих 1 и полученото число умножих с 2. Получих двуцифрено число, на което цифрата на единиците е три пъти по-малка от цифрата на десетиците. Кое число съм намислил? (56-а Национална олимпиада по математика, IV клас, общински кръг – 18.03. 2007)

Решение. Съставяме диаграмата с квадратчета и стрелки, оформена в таблица, и разглеждаме трите логически възможности за числото, което е краен резултат при извършените действия: а) цифрата на единиците е 1, а на десетиците 3 (31); б) цифрата на единиците е 2, а на десетиците 6 (62); в) цифрата на единиците е 3, а на десетиците 9 (93).

Разглеждаме случай а). Първото обратно преобразуване ($\cdot 2$) е изпълнимо. Следователно 31 не е намисленото число.

	$\xrightarrow{-4}$ $\xleftarrow{+4}$		$\xrightarrow{:3}$ $\xleftarrow{\cdot 3}$		$\xrightarrow{-1}$ $\xleftarrow{+1}$		$\xrightarrow{\cdot 2}$ $\xleftarrow{:2}$		31
----------------------	---	----------------------	--	----------------------	---	----------------------	--	----------------------	----

Разглеждаме случай б). Извършваме обратните преобразувания и достигаме до числото 100.

$\square$ 100	$\xrightarrow{-4}$ $\xleftarrow{+4}$	$\square$ 96	$\xrightarrow{:3}$ $\xleftarrow{\cdot 3}$	$\square$ 32	$\xrightarrow{-1}$ $\xleftarrow{+1}$	$\square$ 31	$\xrightarrow{\cdot 2}$ $\xleftarrow{:2}$	$\square$ 62
------------------	---	-----------------	--	-----------------	---	-----------------	--	-----------------

Разглеждаме случай в). Първото обратно преобразувание ($\cdot 2$) е изпълнимо. Следователно 93 не е намисленото число.

$\square$	$\xrightarrow{-4}$ $\xleftarrow{+4}$	$\square$	$\xrightarrow{:3}$ $\xleftarrow{\cdot 3}$	$\square$	$\xrightarrow{-1}$ $\xleftarrow{+1}$	$\square$	$\xrightarrow{\cdot 2}$ $\xleftarrow{:2}$	$\square$ 93
-----------	---	-----------	--	-----------	---	-----------	--	-----------------

Отговор. Намисленото число е числото 100.

Задача 10. Трима моряци и една маймуна са на необитаем остров. Една вечер всички събират кокосови орехи и ги слагат в един голям чувал. Решават да изчакат до сутринта, за да си ги поделят и лягат да спят.

През нощта един от моряците става, дава орех на маймуната, разделя орехите на три равни части, взема едната част, скрива я, а другите две части връща в чувала. След това се връща да спи, доволен, че е взел своя дял. Но той не е единствен. През нощта и вторият моряк прави същото: дава един орех на маймуната, дели на три равни части останалите, скрива едната част, връща другите две в чувала и се прибира да спи. После същите действия повтаря и третият моряк.

На сутринта, сякаш нищо не се е случило, тримата моряци заедно дават един орех на маймуната и разделят на три равни части останалите орехи в чувала. Намерете най-малкия начален брой орехи, с които е възможно да се случи това. (Конкурсен изпит за посъпване в V клас на Природоматематическа гимназия „Акад. Никола Обрешков” – гр. Бургас, 2000) (Върбанова, 2013: 96)

Отговор: 79.

Упътване. Тъй като не са известни нито началото, нито крайният резултат от „делението“ на орехите, то за да се използва инверсия, е необходимо да се правят допускания (хипотези) за крайния резултат (броят на орехите, които е получил всеки от моряците при последното разделяне). В резултат на допускането може хипотетично да започне „връщането“. Ако при допускането (за краен резултат) число се осъществява връщане и всички обратни преобразувания са „изпълними“, то предположеното число е валидно, а числото, до което се достига в резултат

на изпълнение на обратните преобразувания, е началото. Ако при връщането се достигне до „неизпълнимо“ преобразуване, то съответното допускане е невалидно. Крайни резултати могат да бъдат естествените числа 1, 2, 3 и т.н. Тъй като се търси най-малкото възможно число, то допускането започва с числото 1 и проверките продължават, докато се стигне до решението. (В случая е необходимо да се проверят числата от 1 до 7.)

Задача 11. Една продавачка на ябълки продала на първия купувач половината от ябълките, но той ѝ върнал 10 ябълки. На втория купувач продала една трета част от останалите ябълки, но той ѝ върнал 2 ябълки. На третия купувач продала половината от останалите ябълки, но той ѝ върнал една ябълка. В този момент продавачката имала 12 ябълки. Колко са били ябълките в началото? (Задача от народното творчество) (Лалчев, 2009: 17).

Отговор. 40.

Упътване. Тъй като продавачката продава на втория купувач една трета част, то в този момент на сергията остават две трети от ябълките.

Задача 12. На улицата била оставена макара с кабел. Минали четирима крадци. Първият откраднал половината от кабела. Вторият откраднал половината от останалата част. Третият откраднал половината от останалата част. Четвъртият крадец откраднал две пети от останалата част. Тогава дошла полиция и било установено, че върху макарата са останали 30 метра кабел. Колко метра е бил кабелът в началото и за колко метра ще отговаря всеки от крадците? (Лалчев, 2009: 17).

Отговор: В началото кабелът е 400 метра.

Задача 13. На път за страната си един търговец трябвало да мине през територията на три враждуващи на страната му племена. Докато минавал през територията на първото племе, трябвало да се раздели с половината от състоянието си и още една трета част от останалото. Същото се случило и при преминаване през териториите на второто и третото племе. Когато се върнал в страната си, търговецът имал състояние за 8800 дохекана (парични единици). Колко дохекана е било състоянието на търговеца в началото? (Задача от Византия) (Лалчев, 2009: 17).

Отговор: 237 600.

Задача 14. На смъртното си легло мъж завещал стадото крави на жена си и на тримата си сина по следния начин. На жена си оставил 2 крави; на най-големия син оставил половината от останалите крави и още половин крава, на средния син – половината от останалите и още половин крава, и на най-малкия син – половината

от останалите и още половин крава. В завещанието е записано, че при неговото изпълнение не се позволява кравите да се режат, тъй като завещанието може да бъде изпълнено с „цели“ крави. Колко са кравите в стадото? По колко крави е получил всеки от семейството? (Задача от Древния Рим). (Лалчев, 2009: 17).

Решение. (Забележка. Необходимо е да се прави разлика между преобразуванията „изваждане на половината“ и „половината от“.)

Ситуацията, описана в текста на задачата, може да бъде моделирана с композиция от 7 преобразувания. Първото от тях е „изваждане на 2“ (завещаното на жената), второто и третото преобразувание са съответно „деление на 2“ и „изваждане на $\frac{1}{2}$ “ (завещаното на най-големия син), четвъртото и петото преобразувание са съответно „деление на 2“ и „изваждане на $\frac{1}{2}$ “ (завещаното на средния син) и шестото и седмото преобразувание са съответно „деление на 2“ и „изваждане на $\frac{1}{2}$ “ (завещаното на най-малкия син). Резултатът от тези преобразувания е числото 0 (стадото е разпределено).

Моделът на задачата е представен в първия ред на таблицата, а преобразуването на модела е представено във втория ред на таблицата.

$\square$	$\xrightarrow{-2}$	$\square$	$\xrightarrow{:2}$	$\square$	$\xrightarrow{-\frac{1}{2}}$	$\square$	$\xrightarrow{:2}$	$\square$	$\xrightarrow{-\frac{1}{2}}$	$\square$	$\xrightarrow{:2}$	$\square$	$\xrightarrow{-\frac{1}{2}}$	0
9	$\xleftarrow{+2}$	7	$\xleftarrow{:2}$	$\frac{7}{2}$	$\xleftarrow{+\frac{1}{2}}$	3	$\xleftarrow{:2}$	$\frac{3}{2}$	$\xleftarrow{+\frac{1}{2}}$	1	$\xleftarrow{:2}$	$\frac{1}{2}$	$\xleftarrow{+\frac{1}{2}}$	0

Отговор: Стадото е от 9 крави. Майката е получила 2, първият син – 4, вторият син – 2, и третия син – 1.

Задача 15. Фермер продал на първия купувач половината от конете си и още половин кон, на втория купувач – половината от останалите коне и още половин кон, на третия купувач – половината от останалите и още половин кон, след което му останали 5 коня. При продажбите не се налагало да се режат конете. Колко коня е имало в стадото преди продажбата? (Лалчев, 2009:18).

Отговор: 47.

Задача 16. Собственик на стадо овце имал нещастieto да бъде ограбен за един месец три пъти. Първият път бандитите откъмнали една трета от стадото плюс една трета овца. Вторият път откъмнали една четвърт от стадото плюс една четвърт овца. Третият път откъмнали една пета от стадото плюс три пети овца. В стадото останали 409 овце. Колко са били овцете преди нападенията, ако е известно,

че овцете не са рязани? (по Дюдни, Х., 525 главоблъсканици, София, Техника, 1981: 77) (Лалчев, 2009: 18).

Отговор: 1025.

Задача 17. Баща, който имал трима синове и три дъщери, оставил в наследство една кутия с таланти (парични единици) и следното завещание: първият син, след като добави още толкова таланти, колкото има в кутията, да вземе 64 таланта; вторият син, след като добави още толкова, колкото са останали в кутията, да вземе 64 таланта; третият син, след като добави още толкова, колкото са останали в кутията, да вземе 64 таланта; първата дъщеря, след като остави още толкова, колкото са останали в кутията, да вземе 32 таланта; втората дъщеря, след като остави още толкова, колкото са останали в кутията, да вземе 32 таланта; третата дъщеря, след като остави още толкова, колкото са останали в кутията, да вземе 32 таланта. След всичко това талантите в кутията се свършили. Колко таланта е оставил бащата? По колко таланта е наследил всеки от синовете и всяка от дъщерите? (Задача на древногръцкия математик Никомах) (Лалчев, 2009: 18).

Отговор: Бащата е оставил 59,5 таланта. Първият син е наследил 4,5 таланта, вторият – 9 таланта, третият син – 18 таланта, първата дъщеря – 4 таланта, втората дъщеря – 8 таланта, и третата дъщеря – 16 таланта.

Б) Втора група задачи (Множеството, чиито елементи са подложени на преобразувания, съдържа повече от едно число)

Задача 1. На две клончета имало общо 16 врабчета. След като от второто клонче отлетели 2 врабчета, а от първото прелетели 5 врабчета на второто, то на двете клончета врабчетата станали поравно. По колко врабчета е имало на всяко клонче? (Задача от народното творчество)

Решение

1. Построяваме математическия модел на задачата (две успоредни „верижки“ от квадратчета и стрелки).

За да бъдат отразени „преобразуванията“ на врабчетата на всяко от клончетата, необходимо е в модела да бъдат построени два реда от преобразувания – за първото и за второто клонче. Всеки ред има две ленти – за „движение“ в едната и в другата посока. За да се следи и общият брой на врабчетата, след всяко преобразуване е удачно да се въведе и трети ред (за общия брой).

Първото действие, описано в текста на задачата, е отлитането на 2 врабчета от второто клонче. Това действие може да се моделира с преобразуванията „изваждане на 2“ за второто клонче и „равно“ за първото клонче (при това действие броят на врабчетата на първото клонче не се е променил).

Второто действие, описано в текста на задачата, е прелитането на 5 врабчета от първото на второто клонче. Това действие се моделира с преобразуванията „изваждане на“ за първото клонче и „прибавяне на 5“ за второто клонче.

След описаните действия врабчетата са станали поравно и на двете клончета. Тъй като всичките врабчета в края са 14 ($16 - 2$), то в последните квадратчета на всеки ред (и за първото, и за второто клонче) е числото 7. (Моделът е представен в таблицата.)

Първо клонче →		$\Rightarrow$		$\xrightarrow{-5}$	7
Първо клонче ←					
Второ клонче →		$\xrightarrow{-2}$		$\xrightarrow{+5}$	7
Второ клонче ←					
Общо	16		14		14

Преобразуване на модела

При преобразуване на модела се попълват лентите за „движение“ в обратна посока. Във всяка от лентите след обратните преобразувания се попълват и получените числови резултати. Така се продължава, докато се достигне началото. (Преобразуванията на модела са представени в таблицата.)

Първо клонче →		$\Rightarrow$		$\xrightarrow{-5}$	7
Първо клонче ←	12	$\xleftarrow{=}$	12	$\xleftarrow{+5}$	7
Второ клонче →		$\xrightarrow{-2}$		$\xrightarrow{+5}$	7
Второ клонче ←	4	$\xleftarrow{+2}$	2	$\xleftarrow{-5}$	7
Общо	16		14		14

Отговор. На първото клонче е имало 12, а на второто – 4 врабчета.

Задача 2. Даниела и Георги набраха от едно дърво 28 ябълки. Георги забеляза, че 3 от неговите ябълки са развалени, и ги изхвърли. После даде на Даниела половината от своите ябълки, набра за себе си от дървото още 6. След като Даниела изяде 5 от своите, броят на ябълките им се изравни. Колко ябълки е имала Даниела в началото? (Сп. „Математика“, бр. 1, 2013).

Задача 3. В автобус пътуват няколко жени и 23 мъже. На спирката слезли 18 пътници, от които половината мъже, и се качили 12 души, от които 5 жени. Тогава жените станали три пъти по-малко от мъжете. Колко жени са пътували първоначално в автобуса?

Отговор: 11.

Задача 4. В три бидона има общо 153 литра мляко. Ако от първия бидон се прелеят във втория 9 литра, а от втория в третия – 5 литра, то в трите бидона ще има поравно количество мляко. По колко литра мляко има във всеки от бидоните?

а) 60, 48, 45; б) 60, 47, 46; в) 42, 55, 56; г) друг отговор

(СМБ – секция „Изток“, Великденско математическо състезание, 22.04.2012, 4 клас).

Решение. Построяваме диаграмата и след това преобразуваме, като заменяме аритметичните преобразувания с техните обратни. При конструирането и преобразуването се има предвид, че всичкото количество мляко е 153 литра, а във всеки бидон накрая има по 51 л ($153 : 3 = 51$).

първи бидон		$\begin{array}{c} -9 \\ \rightarrow \end{array}$		$\begin{array}{c} = \\ \rightarrow \end{array}$	51
	60	$\begin{array}{c} +9 \\ \leftarrow \end{array}$	51	$\begin{array}{c} = \\ \leftarrow \end{array}$	
втори бидон		$\begin{array}{c} +9 \\ \leftarrow \end{array}$		$\begin{array}{c} -5 \\ \rightarrow \end{array}$	51
	47	$\begin{array}{c} -9 \\ \rightarrow \end{array}$	56	$\begin{array}{c} +5 \\ \leftarrow \end{array}$	
трети бидон		$\begin{array}{c} = \\ \rightarrow \end{array}$		$\begin{array}{c} +5 \\ \rightarrow \end{array}$	51
	46	$\begin{array}{c} = \\ \leftarrow \end{array}$	46	$\begin{array}{c} -5 \\ \leftarrow \end{array}$	
всичко	153		153		153

Отговор. В първия съд има 60 л, във втория 47 л и в третия 46 л.

Задача. 5. В три бидона има общо 30 л мляко. След като от първия прелели във втория 4 л, от втория прелели в третия 2 л и от третия прелели в първия 3 л, се оказало, че в трите бидона има едно и също количество мляко. По колко литра е имало първоначално във всеки бидон? (Лалчев, 2009).

Отговор: 11, 8, 11.

Задача 6. Ако един играч загуби на „Черен Петър“, „плаща“ толкова жетона, че да удвои наличните жетони на всеки от останалите играчи. Гошо, Пешо и Тошо играли три игри. Първата игра загубил Гошо, втората – Пешо, третата – Тошо. След третата игра всеки имал по 24 жетона. Колко жетона е имал в началото Гошо?

(Национален кръг на „Европейско Кенгуру“, Тема III – IV клас, 5 юни, 2010 г.)

Решение. Основните етапи при конструирането на модела са три:

1етап – Гошо раздава жетоните.

Жетоните на Гошо намаляват, но в този момент ние не познаваме точното преобразуване и затова стрелката, която излиза от Г, е оставена „без число“. Жетоните на Пешо се удвояват. Жетоните на Тошо се удвояват.

2 етап – Пешо раздава жетоните.

Жетоните на Гошо се удвояват. Жетоните на Пешо намаляват, но в този момент ние не познаваме точното преобразуване и затова стрелката от П е оставена „без число“. Жетоните на Тошо се удвояват.

3 етап – Тошо раздава жетоните.

Жетоните на Гошо се удвояват. Жетоните на Пешо се удвояват. Жетоните на Тошо намаляват, но в този момент ние не познаваме точното преобразуване и затова стрелката от Т е оставена „без число“.

В последните три квадратчета записваме числото 24.

1) етап

Гошо	☐	☐ →	☐
Пешо		$\xrightarrow{2}$	☐
	☐		
Тошо	☐	$\xrightarrow{2}$	☐

2) етап

Гошо	☐	☐ →	☐	$\xrightarrow{2}$	☐
Пешо		$\xrightarrow{2}$	☐	☐ →	☐
	☐				
Тошо	☐	$\xrightarrow{2}$	☐	$\xrightarrow{2}$	☐

3) етап

Гошо	☐	☐	☐	$\xrightarrow{2}$	☐	$\xrightarrow{2}$	24
Пешо	☐	$\xrightarrow{2}$	☐	$\xrightarrow{2}$	☐	$\xrightarrow{2}$	24
Тошо	☐	$\xrightarrow{2}$	☐	$\xrightarrow{2}$	☐	$\xrightarrow{2}$	24

След като моделът на текста на задачата е готов, извършваме последователно обратните преобразувания в обратен ред. За да направим прехода в обратна посока в случаите, в които не е известно правото преобразуване, съобразяваме, че ако знаем броя на жетоните на двама от играчите, то можем да намерим и броя жетоните на третия играч, защото всичките жетони във всеки момент) са $3 \cdot 24 = 72$.

Гошо	☐ 39	☐	☐	$\xrightarrow{2}$	☐	$\xrightarrow{2}$	24
		$\xleftarrow{33}$ +33	6	$\xleftarrow{2}$:2	12	$\xleftarrow{2}$:2	
Пешо	☐ 21	$\xrightarrow{2}$	☐	$\xrightarrow{2}$	☐	$\xrightarrow{2}$	24
		$\xleftarrow{2}$:2	42	$\xleftarrow{2}$	12	$\xleftarrow{2}$:2	
Тошо	☐ 12	$\xrightarrow{2}$	☐	$\xrightarrow{2}$	☐	$\xrightarrow{2}$	24
		$\xleftarrow{2}$:2	24	$\xleftarrow{2}$:2	48	$\xleftarrow{2}$ +24	

Отговор. В началото Гошо е имал 39 жетона.

Задача 7. В три съда има общо 24 литра течност. Отначало от първия съд се прелива във втория и в третия по толкова течност, по колкото има във всеки от тях; след това от втория съд се прелива в първия и в третия по толкова, по колкото

има във всеки от тях, и накрая от третия съд се прелива в първия и във втория по толкова, по колкото има във всеки от тях. След последното преливане се оказва, че в трите съда има поравно количество течност. По колко литра е имало във всеки от съдовете първоначално (Лалчев, 2009: 20)?

Отговор: 13, 7, 4.

Задача. 8. Четирима братя имали общо 64 лева, с които започнали да играят следната игра. Отначало първият от тях дава на всеки от останалите по толкова пари, по колкото има всеки от тях; след това вторият брат прави същото по отношение на останалите трима; след това третият брат прави същото по отношение на останалите трима и накрая четвъртият брат прави същото по отношение на останалите трима. След последното раздаване се оказва, че всички братя имат поравно пари. По колко лева е имал всеки от тях първоначално? (Лалчев, 2009: 21).

Отговор: 33, 17, 9, 5.

Задача. 9. В седем кош има известно количество ябълки. Ако от първия кош се прехвърлят във всеки от останалите по толкова ябълки, по колкото има във всеки от тях, и тази манипулация се повтори последователно с всеки следващ кош, то накрая във всички кошове ще има по 256 ябълки. По колко ябълки има първоначално във всеки кош? (Лалчев, 2009: 21).

Отговор: 898, 450, 226, 114, 58, 30, 16.

Задача 10. Три момчета – Иван, Петър и Стоян, делят помежду си орехи. Отначало Иван дал на другите двама по една четвърт от своите орехи и още половин орех. След това Петър дал на Иван и Стоян по една четвърт от намиращите се в него орехи и още половин орех. Накрая същото направил и Стоян. В резултат на това се оказало, че всички имат по 30 ореха. По колко ореха е имал всеки първоначално? (За прием в Националната природо-математическа гимназия „Академик Любомир Чакалов“, 11 юли, 1990).

Решение. Решението е представено в таблицата.

Иван	x	.1/2	□	−1	□	+	□	+1/2	□	+	□	+1/2	30
	14	.2	7	+1	6	−7,5	13,5	−1/2	14	−15,5	29,5	−1/2	
Петър	x	+	□	+1/2	□	.1/2	□	−1	□	+	□	+1/2	30
	26	−3,5	29,5	−1/2	30	.2	15	+1	14	−15,5	29,5	−1/2	
Стоян	x	+	□	+1/2	□	+	□	+1/2	□	.1/2	□	−1	30
	50	−3,5	53,5	−1/2	54	−7,5	61,5	−1/2	62	.2	31	+1	

Отговор: Иван е имал 14 ореха, Петър – 26 ореха, и Стоян – 50 ореха.

Задача 11. Трима братя имат общо 654 лева. Ако първият даде на втория толкова, колкото има вторият, и на третия – два пъти по толкова, колкото има третият; след това вторият даде на третия толкова, колкото има третият, и на първия два пъти по толкова, колкото има първият; след това третият даде на първия толкова, колкото има първият, и на втория два пъти по толкова, колкото има вторият, то след последното раздаване ще се окаже, че тримата имат поравно пари. По колко пари има всеки един от тях? (Лалчев, 2009: 21).

Отговор: 387, 189, 78.

Задача 12. Три момчета – Ангел, Борис и Васил, имали общо 384 марки. Първо Ангел разделил марките, които имал, на две равни части, едната част оставил за себе си, а другата разделил поравно между Борис и Васил. След това Борис разделил марките, които имал в момента, на две равни части – едната част оставил за себе си, а другата разделил поравно между другите двама. Накрая и Васил направил същото с марките, които имал в момента. След последното разделяне се оказало, че всеки има по равен брой марки. По колко марки е имал първоначално всеки от тях? (Лалчев, 2009: 21).

Отговор: Ангел – 64, Борис – 112, Васил – 208.

Задача 13. Четирима братя имали общо 5184 лева. Най-големият от тях разделил парите, които имал, на 3 равни части, една част оставил за себе си, а останалите раздал поравно на останалите трима. След това вторият брат разделил парите, които имал, на 3 равни части, една част оставил за себе си, а останалите раздал поравно на останалите трима. След това третият брат разделил парите, които имал, на 3 равни части, една част оставил за себе си, а останалите раздал поравно на останалите трима. Накрая четвъртият брат разделил парите, които имал, на 3 равни части, една част оставил за себе си, а останалите раздал поравно на останалите трима. След последното разделяне се оказало, че всичките братя имат поравно пари. По колко пари е имал всеки от тях първоначално? (Лалчев, 2009: 21).

Отговор: 144, 400, 1168, 3472

Задача 14. На един остров имало само таралежи, лисици и змии. Таралежите само закусват, като на закуска всеки таралеж изяжда по една змия. Лисиците само обядват, като на обяд всяка лисица изяжда по един таралеж. Змиите само вечерят, като всяка змия изяжда по една лисица. В четвъртък след вечеря на острова останало само едно животно – змия. По колко животни от всеки вид е имало на острова в понеделник преди закуска, ако е известно, че през това време животните не са се размножавали и не са умирали от естествена смърт? (Национално състезание „Зимни математически празници“, Плевен, задача за IV клас, 2000) (Лалчев, 2009: 22).

Отговор: Таралежи – 41, лисици – 28, змии – 60.

Вместо заключение

Елементарният математически инструментариум, логическата простота и широката приложимост правят инверсията ефективно средство в училищната математика. В много от случаите методът на „последователните преобразувания и тяхното обръщане“ решава задачата почти непосредствено и прави излишни аритметичните и логическите „еквилибристики“ или нейното моделиране по друг начин (например чрез уравнение / система от уравнения).

ЛИТЕРАТУРА

- Болгарский, Б. В. (1979). *Очерки по истории математики*. Минск: Вышэйшая школа.
- Върбанова, М. (2013). *Структурно-функционално моделиране в началната училищна математика*, Пловдив: Астарта.
- Ганчев, И., Чимев, К. & Стоянов, Й. (1987). *Математически фолклор*. София: Народна просвета.
- Гроздев, С. & Шаркова, И. (2013). *Задачите на Рут. I – IV клас*. София: Архимед.
- Еленски, Ш. (1967). *Лилавати*. София: Издателство „Техника“.
- Лалчев, З. (1999). Метод на инверсията (Първа част), *Начално образование*, № 5, 28 – 40.
- Лалчев, З. (1999). Метод на инверсията (Втора част), *Начално образование*, № 6, 12 – 21.
- Лалчев, З. (2009). *Математика в задачи и методи. Книга 2. За учителя в началните класове*. София: Университетско издателство „Св. Климент Охридски“.

THE INVERSION – A METHOD IN PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS

Abstract. The authors adapt the inversion method didactically for the purposes of Education and represent its heuristic possibilities in solving „nonstandard” problems in Primary school mathematics.

✉ **Prof. Dr. Zdravko Lalchev**

Faculty of Preschool and Primary School Education
University of Sofia
69A, Shipchenski prohod Blvd.
1574 Sofia, Bulgaria
E-mail: zdravkol@abv.bg

✉ **Prof. Dr. Margarita Varbanova**

Faculty of Mathematics and Informatics
University of Veliko Tarnovo „St. St. Cyril and Methodii“
3A, Arh. G. Kozarev Blvd.
5000 Veliko Tarnovo, Bulgaria
E-mail: mvarbanova11@abv.bg