Interdisciplinary
Междупредметните връзки

ЗА ПОКАЗАТЕЛНАТА ФУНКЦИЯ, ЛОГАРИТМИЧНАТА ФУНКЦИЯ И ЧИСЛОТО *e*

Ивелина Коцева
Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Резюме. Основната цел на статията е да подпомогне работата на учителите по математика и природни науки в тяхната преподавателска дейност. Изложението в статията е подчинено на интердисциплинарен подход, благодарение на който се разкрива генезиса на основните понятия, свързани с темата. Изследват се връзки в исторически и методически план, за които липсва допълнителна информация в учебниците за гимназиален етап на средното образование.

Keywords: exponential function, exponential laws, logarithm, the number *e*

Въведение

Както е известно, силата на математиката се крие в нейната дедуктивна структура. Разбира се, от една страна това дава предимство при овладяването на хилядолетния човешки опит в синтезиран вид за относително кратко време. От друга страна, съществува сериозен риск за по-задълбоченото разбиране на основни и твърде важни понятия в случай, че в преподаването им преобладава формалният подход, свързан главно със заучаване на дефиниции, доказване на теореми и извеждане на свойства. При това положение, естественият произход на много от понятията остава неизяснен, а за някои други неща от живота не ни остава нищо друго, освен само да споменем. Такъв е случаят и с числото ***e***, което е в специална връзка с редица социални и природни явления, но присъствието му в учебниците е почти само информативно.

Внасянето на елементи от история на математиката е всеизвестен подход с доказани положителни психологически и когнитивни предимства. Търсенето на подходящи педагогически похвати за интегрирането му в обучението по математика е свързано с категоризация на проблемите, възникващи при въпросите „защо” и „как” да използваме история на математиката (Jankvist, 2009; 2010; 2011). Jankvist описва разликата между това да използваме „историята като цел”, което означава да придобием фактологични знания относно научни открития, събития и хора, и да използваме „историята като средство”, за да предизвикаме интерес и мотивация с цел - разбиране на трудностите, съпътстващи развитието на математиката.

Разграничението между „историята като цел” и „историята като средство” води до въвеждането на термина „генетичен подход” (*genetic approach*). За първи път този термин е използван от Otto Toeplitz през 1963 г. в книгата му „*The calculus: a genetic approach*”. Както се казва в предговора към едно от най-новите издания:

> [Т]ази книга не е панацея ... Тя не е също така нито учебник, нито история. Макар че Toeplitz познава историята, той не се опитва да обясни историческото развитие на математическия анализ. Това, което той прави е да „дестилира” ключови понятия от анализа, илюстрирани чрез множество проблеми, решаването на които води до появата на тези понятия (Toeplitz, 2007).

Съзнателна употреба на термина „генетичен подход” в противовес на термина „исторически подход” се прави и в съвременни изследвания, посветени на връзката между математика и физика (Tzanakis & Coutsomitros, 1988; Tzanakis, 1999; Tzanakis & Thomaidis, 2000). Основната идея е „математиката да се представи не само като логически завършен продукт, но и като *процес,*”[1)] а на физиката да се гледа не само като на съвкупност от закони, понятия, принципи, модели и теории, но и като на поле за приложение на различни методи на познание, базирани на специфични изследователски дейности (Galili, 2008). Прилагането на такъв подход обаче изисква време, както от страна на учениците, така и от страна на учителите и може да бъде оправдан само когато целта е: да се подпомогне разбирането; да се предизвика интерес; да се развие критично мислене; да се придобият навици, свързани с нови стилове на учене, които да заменят линейния модел на учене; да се задълбочи разбирането на интердисциплинарните връзки.

Темата за двете функции - показателна и логаритмична и числото ***e*** е важна от гледна точка на приложението им в природните и социалните науки. В същото време тя не е достатъчно застъпена в учебните програми по математика. В задължителната подготовка се изучават единствено операциите степенуване и логаритмуване, без да се прави преход към логаритмична и показателна функция. Внасянето на яснота върху генезиса на числото ***e*** е също желателно, поради връзката му с натурален лотаритъм и неговата обратна функция – експоненциалната (при основа числото ***e***). Разбира се, проблемът с по-задълбоченото им разбиране не е само в българското образование, но както казва Албърт Бартлет във връзка с проблемите, свързани с растежа:[2)] „Най-големият недостатък на човешката раса е в неспособността на човека да разбере експоненциалната функция” (Bartlett, 1976). Опасността от това неразбиране се крие в характера на процеси, при които малки нараствания на определени величини могат да доведат до мащабни и много бързи промени в другu величини, за които процеси експоненциалната функция е един подходящ модел за описание.

Предвид важността на проблемите, върху които се акцентира по-горе, изложението в статията бива първоначално подчинено на генетичния подход при въвеждане на основните понятия, а впоследствие (в методичната част) се търсят начините за преодоляване на ограниченията, наложени от учебните програми. За да бъде по-ясно, изложението в исторически план е съпътствано с необходимите пояснения и отклонения, които имат отношение към следващо съдържание на статията, а на места, за да бъдат избегнати излишните подробности, доказателствата на твърденията се правят със средства, познати на съвременния читател. Поради многобройните вътрешни връзки, съпътсващи генезиса на понятията, за които става думи, акцент бива поставен само върху тези техни разклонения, които биха допринесли за по-бързо вникване в смисъла на понятията.

Операцията логаритмуване и логаритмичната функция

Идеята за логаритъм възниква към края на 16 в. и началото на 17 в. в отговор на потребността от нови средства за улесняване на пресмятанията главно в астрономията и търговията. Умножението и делението на многоцифрени числа и особено на тригонометрични величини, каквито пресмятания са правени на ръка и с помощта на готови таблици, е отнемало изключително много време. Тези операции могат да бъдат сведени до по-простите операции събиране и изваждане, но процедурите, свързани с познатите до 17 в. методи са тромави в сравнение с възможностите, които предлагат свойствата на логаритъма.

Метод за редуциране на умножението до събиране и изваждане преди откриването на логаритмите е бил използван още в древен Вавилон (2000-1600 г.пр. Хр.) чрез правилото

$$a.b = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$$

и с помощта на предварително изработената таблица на квадратите на числата до 100 000 (Башмакова et al., 1975). Същото правило може да бъде приложено и при делението, ако то бъде заменено с умножение на числото **a** по реципрочната стойност на числото **b**, която се взима от съответните таблици на реципрочните числа.

Друг метод, използван в края на 16 в. и началото на 17 в. е *prosthaphaeresis* (от гр.: *prosthesi* – събирам, *afairesi* – изваждам). При него умножението и делението на числата се свежда до събиране и изваждане чрез която и да е от четирите тригонометричните формули за произведение на синус и косинус. Например, ако искаме да умножим числата 0.23486353423 и 0.73635268208 и използваме формулата

$$\sin \alpha . \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)] ,$$

трябва първо от таблиците със стойности на синуса да намерим тези ъгли α и β, чиито синуси са равни на 0.23486353423 и 0.73635268208, след което от таблиците със стойности на косинус да намерим $\cos (\alpha - \beta)$ и $\cos (\alpha + \beta)$, да извадим тези косинуси и най-накрая да разделим полученото на две. Крайният резултат е търсеното произведение.[3)] Тези методи не се използват след откриването на логаритъма и неговото основно свойство

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$

благодарение на което процедурата се опростява значително.

Всъщност, в основата на откритието на логаритмите стоят добре познатите към края на 16 в. свойства на аритметичната и геометричната прогресии. Съответствието между умножението, делението, повдигането в степен и извличането на корен в геометричната прогресия от една страна и (в същия ред) събирането, изваждането, умножението и делението в аритметичната прогресия е било известно на редица математици. Сравнение на двете прогресии се среща в словесна форма още при Архимед в съчинението му „Преброяване на песъчинките” и много по-късно при Никола Шюке в „Наука за числата” (1484). Достатъчно подробно е изследвано това съответствие от Михаел Щифел (1487–1567) в „Пълна аритметика” (1544). За опростяване на изчисленията с големи числа Щифел сравнява в своята книга две редици – една аритметична и една геометрична прогресия:

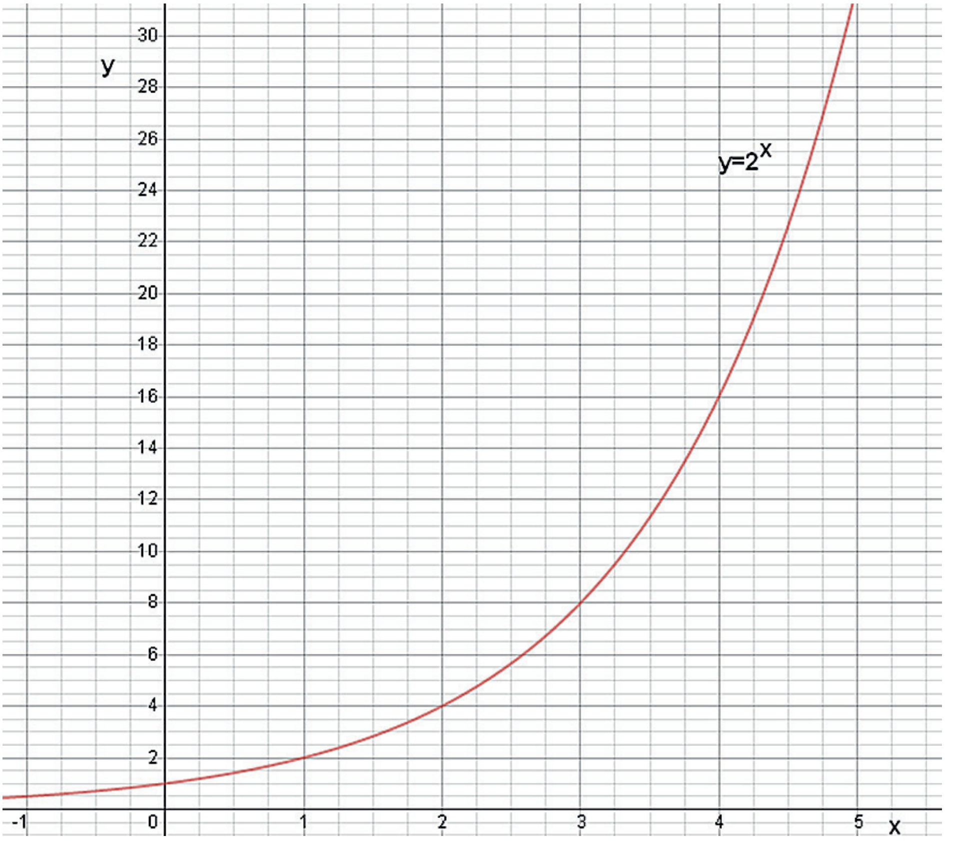
$$..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...$$

$$..., \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, ...$$

Числата от първата редица той нарича *експоненти* (от лат. exponent – показател) на числата от втората редица. Това съответствие се определя по следния начин: на умножението на членовете на геометричната прогресия отговаря сбора на техните експоненти, а на делението им – разликата на експонентите им. Щифел извежда и някои други съотношения между тези редици, в частност повдигането в степен и извличането на корен, но изпуска възможността да създаде нов способ на изчисление (Шибасов & Шибасова, 2008).

Съвременният читател, който има това предимство пред математиците от 16-17 в., че е вече добре запознат с графичния метод, би могъл да си представи още по-ясно това съответствие, ако изобрази на координатната система функционална зависимост, при която независимата променлива (аргументът на функцията) приема стойностите на аритметична прогресия, а зависимата променлива приема стойностите на геометрична прогресия. Например, на Фиг. 1 е представена зависимостта, при която на увеличение на независимата променлива (по хоризонталната ос) с единица, съответства удвояване на зависимата променлива (по вертикалната ос). Днес знаем, че това е графиката на показателната функция $y = a^x$, при $a = 2$ (съвременна терминология), и тази графика е наистина „показателна" за разглежданата зависимост. Латинското наименование *exponent*, произлиза от глагола *exponere* (показвам). Следователно, в българския език *експоненциална функция* би следвало да се използва като латинското наименование на *показателна функция*. Днес ни е добре известно също така, че търсенето на това число **x** – показателят, на който трябва да повдигнем основата **a** на показателната функция $y = a^x$, за да получим предварително зададено число **y**, съответства на операцията логаритмуване. С други думи (отново служейки си със съвременна терминология) операцията „логаритмуване при определена основа" е обратна на операцията „повдигане на основата на определена степен". По аналогичен начин, логаритмичната функция се дефинира като обратна на показателната функция. Общото определение на логаритмичната и показателната функция като взаимно обратни бива дадено едва през 18 в. от Ойлер (Шибасов & Шибасова, 2008).

Всичко казано дотук не е било изразено така експлицитно в края на 16 в. и началото на 17 в. Като изключим термина за показател – *exponent*, термини свързани с основата и операцията логаритмуване (още по-малко логаритмуване при дадена основа) все още не са въведени, да не говорим за термините на математическия анализ, чиито основи тепърва ще бъдат положени. Самото понятие *функция* – едно от най-важните в математиката и основно в анализа, претърпява дълго развитие, обхващащо два периода: (1) периодът, започващ около 2000 г. пр. Хр.



Фиг. 1. Графика на функцията $y=2^x$

и завършващ към началото на 18 в., в който функционалните зависимости присъстват имплицитно, главно под формата на таблици, и (2) периодът, започващ с развитието на математическия анализ през 17-18 в. до наши дни, в който се правят сериозни опити от страна на много математици и физици за експлицитното формулиране на понятието (Kleiner, 1989).

През този втори период са дадени над 13 дефиниции за *функция* – Нютон, 1665, Грегори, 1667, Лайбниц, 1673, 1714), Бернули, 1697, 1718, Ойлер, 1748, 1755, Лагранж, 1797, 1806, Дирихле, 1829, Каратеодори, 1917 и Бурбаки, 1939 (Cha, 1999). Някои от авторите (Бернули, Ойлер, Лагранж) дават по две и повече дефиниции, което говори за голяма динамичност в развитието на идеите.

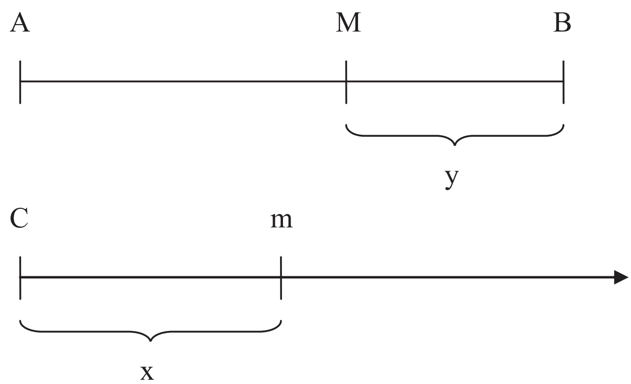
Анализът, разработен от Нютон и Лайбниц през 17 в. също не е имал формата, която познаваме днес. Той произлиза от методи за решаване на задачи, свързани с криви – намирането на тангента към крива, на площ под крива, на дължина на крива и на скорост на точка, движеща се по крива. Поради тази причина въвеждането на термина „функция" в този ранен етап на втория период бива обвързано с геометрията. Например Лайбниц, 1692 го използва по следния начин: „тангентата е функция на кривата" (Kleiner, 1989). За да се освободи понятието *функция* от геометричния си смисъл и да придобие по-абстрактна (аналитична) форма са необходими нови открития, които да дадат тласък на развитието на математиката в нови направления. Твърде важни са развитието на теорията на числата и въвеждането на множеството на реалните числа, а после и това на комплексните числа. Това е свързано с областите на дефиниране на функциите и свойствата непрекъснатост, диференцируемост и интегруемост. Друго, важно за по-нататъшните ни разглеждания, направление е развитието на функциите в безкрайни редове, например в тригонометрични (откритието на Фурие) или в степенни редове (на Нютон, Тейлър, Маклоран и др.).

Първата публикация, свързана с логаритми е направена от Джон Непер, 1550-1617 и носи заглавието „Описание на чудната таблица на логаритмите" (*Mirifici logarithmorum canonis description*. Edinburgi, 1614). Именно Непер за пръв път използва термина логаритъм, който произлиза от гръцките думи „логос" – отношение и „аритмос" – число (т.е число на отношението). Шест години по-късно (1620), независимо от Непер, таблица с логаритми публикува и швейцарският учен Йобст Бюрги (1552-1632) – придворен часовникар и майстор на астрономически инструменти в Касел, който през 1603 г. се премества в Прага, където работи в астрономическата обсерватория заедно с Кеплер (Башмакова et al., 1975). Докато разглежданата от Щифел геометрична прогресия е с доста раздалечени членове, то целта на Бюрги е била да получи прогресия с по-гъсто разположени върху числовата ос членове. Затова, при съставянето на своите таблици той разглежда двете редици:

$$0, \quad 10.1, \quad 10.2, \quad ..., \quad 10.n, \; ...$$

$$10^8,\ 10^8.(1+\frac{1}{10^4}),\ 10^8.(1+\frac{1}{10^4})^2,\ ...,\ 10^8.(1+\frac{1}{10^4})^n,\ \ldots\ .$$

Макар и в таблиците на Бюрги да е поместено невероятно голяма количество логаритми (до n = 230270022), те все още не задават логаритмичната функция в пълния смисъл на понятието функция.



Фиг. 2. Неперово сравнение на движения

За разлика от Бюрги, Непер е бил много близо до идеята за логаритмична зависимост, тъй като подходът му се базира на конкретен пример от кинематиката. На съвременен език неговите разсъждения биха изглеждали по следния начи: на Фиг. 2. са представени движенията на две тела, обозначени накратко с букви M и m. Първото тяло M се движи по отсечката AB, тръгвайки от A със скорост ky – пропорционална на оставащото разстояние y до B. Второто тяло m се движи равномерно по лъч с начало C. Двете тела тръгват едновременно с една и съща начална скорост v. Приемаме, че дължината на отсечката AB е 1 (за удобство). Търси се връзката между x (изминатото от тялото m разстояние за време t) и y.

Тъй като движението на m е равномерно, то x = vt. От друга страна скоростта на M, изразена като производна на изминатия път по времето е $\frac{d(1-y)}{dt}$ и е пропорционална на разстоянието y според началните условия на задачата, т.е

$$\frac{d(1-y)}{dt} = \text{ky}.$$

В началния момент (при y = 1) тя е равна на v, следователно k = v. Получава се диференциалното уравнение

$$\frac{d(1-y)}{dt} = \text{vy, или } \frac{dy}{dt} = \text{vy},$$

което решаваме чрез разделяне на променливите

$$\frac{dy}{y} = \mathrm{v}dt$$

и след интегриране на полученото равенство получаваме общото решение

$$\ln|y| = -\mathrm{v}t + \ln|C|.$$

Намираме константата С от началните условия. При t = 0, y = 1 и следователно $0 = \ln|C|$. Най- накрая, отчитайки vt = x и y > 0, получаваме ln y = - x (или $\ln\frac{1}{y} = x$) (Шибасов & Шибасова, 2008).

Непер не използва точно тези означения, но неговите разсъждения го доближават много до идеята за логаритмичната функция, тъй като самата постановка на задачата за сравняване на описаните по-горе две движения (т.е. сравняването на непрекъснати процеси) съдържа в себе си идеята за функция, която както виждаме се оказва именно логаритмичната функция.

Всъщност Непер разделя участъците на движение на 10^7 части, като всеки от тях съответства на 10^{-7} част от времето на движение. Изчисленията, които той прави впоследствие в продължение на 20 години,[4)] му позволяват да даде за всяко число N от 5 до 10 000 000, стойността на това число L, за което да бъде изпълнено равенството $N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$. Преди да дефинира числото L като „логаритъм", Непер го нарича „изкуствено" число. Логаритмичните таблици, съставени от Непер съдържат именно стойностите на L. В тях има неточности, които се основават на факта, че Непер приема логаритъма на единицата за различен от 0.

Числото *e* и натурален логаритъм

В работите на Непер не се говори за натурален (естествен) логаритъм и още по-малко за константата ***e***. Интересното е обаче, че това число започва да „загатва" за себе си в работата на математиците от онова време, без този факт да бъде осъзнаван.[5)] Например, числото $(1 - 10^{-7})$, което Непер взима за основа на своите изчисления, повдигнато на 10^7 степен е близо (с точност до седмия знак след десетичната запетая) до реципрочната стойност на ***e***, т.е до $\frac{1}{e}$.

Изненадващото е, че „откритието" на константата изобщо не е свързано с логаритмите и бива приписано на Якоб Бернули, чиято работа през 1683 върху задачата за сложната лихва, го принуждава да търси границата на редицата

$$(1 + {}^{1}\!/_{n})^n, \quad n = 1,2,3, \ldots,$$

когато n клони към безкрайност. Именно тази граница е числото ***e***. Бернули, без да въвежда символ за тази граница и без да прави връзка между нея и логаритмите доказва, че тя е число между 2 и 3, което е и първата оценка на числото ***e***. Това е и първият случай в математиката, при който число бива дефинирано като граница на редица.[6)]

Символът ***e*,** като обозначение на числото, бива използван за първи път от Ойлер в писмо до Голдбах през 1738. Поради този факт числото ***e*** е известно в математиката като Ойлеровото <u>число</u>, подчертаваме число, в опит да направим разграничение между него и още едно число, свързано с името на Ойлер, което бива наречено *Ойлерова константа* (по-точно това е константата на Ойлер-Маскерони.[5)] Естествено, това не означава, че числото ***e*** не си остава константа. До 1748 г., когато публикува своята работа *Introduction in Analysin infinitorum*, Ойлер прави много открития, свързани с числото ***e***. Първо, той показва, че ***e*** е сума на безкраен ред:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots, \qquad (1)$$

където $n! = 1.2.3.4\dots n$. Второ, той доказва, че дефинирано чрез (1), числото ***e*** е и граница на редицата, разглеждана от Бернули:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e, \qquad (2)$$

и изчислява ***e*** с точност до 18 знака след десетичната запетая (което би могло да се получи при сумиране по формула (1) до $n = 20$).

Особеностите на числото ***e***, стават обект на изучаване на по-късен етап при развитие на алгебрата и теорията на числата. То (също като π) е ирационално (т.е не е рационално, което означава, че не може да се представи като частно на цели числа) и е трансцедентно (т.е не е алгебрично, което означава, че не е корен на полином с рационални коефициенти). Неговата стойност (както и на числото π) може да се получи единствено чрез апроксимации, които стават все по-добри от времето на Ойлер до днес, благодарение развитието на компютърните технологии.[7.8)] Отново на Ойлер дължим едно забележително равенство, което свързва двете константи ***e*** и π, имагинерната единица $i = \sqrt{-1}$ и числата 0 и 1

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \qquad (3)$$

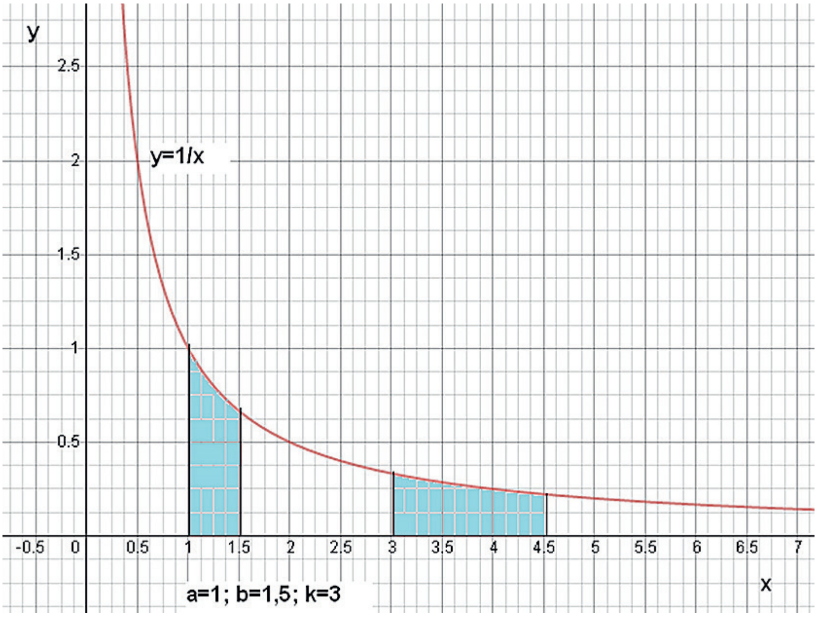
Равенство (3) е следствие от друго едно равенство (изведено пак от Ойлер):

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

при заместване на x с π.

Поставянето на акцент върху общопризнатия принос, който имат Якоб Бернули и Ойлер за появата на числото ***e***, не може да омаловажи работите и на други математици в периода от 1614 (Непер) до 1748 (Ойлер), между които Oughtred, Briggs, Saint-Vincent, Huygens, Mercator, Gregory, Leibnitz.[5)] Още повече информация може да бъде намерена във втори том на „История на математиката" (Башмакова et al., 1975), чиито подробности ще бъдат избегнати тук, защото е по-важно да бъде направена връзката към натурален логаритъм. От всички споменати по-горе имена избираме (неслучайно) името Saint-Vincent. Става въпрос за белгийски математик на име Григорий (1584-1667), чието второ име остава неизвестно и поради факта, че е от Сен Венсан, остава в история на математиката именно като Сен Венсан. Неговата работа е свързана с изучаване на свойствата на хиперболата (y = 1/x) и намирането на площта на участъци от числовата ос под нейната графика (Шибасов & Шибасова, 2008; Шень, 2005). В своя „Геометричен труд за квадратурата на кръга и коничните сечения" от 1647, Сен Венсан доказва две важни свойства за площта на криволинейните трапеци, ограничени от хиперболата y = 1/x за x>0:

Първо: Лицата на трапеците, построени върху интервалите [a, b] и [ka, kb] от абсцисната ос са равни помежду си (Фиг. 3).



Фиг. 3. Графика на хиперболата y=1/x за x>0

Доказателство: (Доказателствата и на двете свойства ще направим със средствата на анализа. Но те могат да бъдат направени и от геометрични съображения, без да се прибягва до средствата на математическия анализ (Шень, 2005)).

Като знаем, че лицето на криволинеен трапец е определен интеграл от съответната функция (в случая $y = 1/x$), получаваме следното при смяна на променливите чрез субституцията $t = kx$ (от $x \in [a, b]$, следва $t \in [ka, kb]$):

$$\int_{ka}^{kb} \frac{dt}{t} = \int_{ka}^{kb} \frac{d(kx)}{kx} = \int_{\frac{ka}{k}}^{\frac{kb}{k}} \frac{kdx}{kx} = \int_{a}^{b} \frac{dx}{x}.$$

В частност получаваме

$$\int_{a}^{b} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{\frac{b}{a}} \frac{dx}{x}.$$

Второ: Ако числото b, което е вторият край на интервала [a, b] приема като стойности членовете на геометрична прогресия, то лицата на съответните трапеци образуват аритметична прогресия.

Доказателство: Въвеждаме функцията $y = f(x) = \int_{1}^{x} \frac{dt}{t}$. Ако аргументът на тази функция последователно приема за стойности членовете на геометричната прогресия $x, x^2, x^3, x^4, \ldots$, то редицата $f(x), f(x^2), f(x^3), f(x^4), \ldots$ е аритметична прогресия. Наистина,

$$f(x^2) = \int_{1}^{x^2} \frac{dt}{t} = \int_{1}^{x} \frac{dt}{t} + \int_{x}^{x^2} \frac{dt}{t} = f(x) + \int_{1}^{x^2/x} \frac{dt}{t} = 2\, f(x),$$

аналогично получаваме $f(x^3) = 3f(x)$ и т.н.

Следователно f(x) е логаритмична функция според начина, по който са разбирали логаритмичната функция до 18в. По-точно: натурален логаритъм от едно положително число x (ще го бележим ln(x)), ще наричаме площта на криволинейния трапец върху интервала [1,x], заграден от графиката на хиперболата $y = 1/x$ (само за $x>0$). Дефинирането на натуралния логаритъм като площ отново изключва въпроса за основата на логаритмуването.

Едно от най-важните следствия от това определение на натуралния логаритъм е, че $\ln 1 = 0$. Действително, в този случай границите на интервала [1,x] при $x = 1$ съвпадат и тогава площта е 0:

$$\ln 1 = \int_{1}^{1} \frac{dt}{t} = 0.$$

Друго важно следствие е, че

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \text{ (за } a>0 \text{ и } b>0).$$

Действително,

$$\ln(ab) = \int_1^{ab}\frac{dt}{t} = \int_1^{a}\frac{dt}{t} + \int_a^{ab}\frac{dt}{t} = \int_1^{a}\frac{dt}{t} + \int_1^{b}\frac{d(ay)}{ay} = \int_1^{a}\frac{dt}{t} + \int_1^{b}\frac{dy}{y} = \ln(a) + \ln(b),$$

където бе необходимо да се направи субституцията t = ay при пресмятане на интеграла $\int_a^{ab}\frac{dt}{t}$ (Шибасов & Шибасова, 2008).

В случая с хиперболата, числото ***e*** се дефинира като това число, за което ln$e$ = 1 (площта, заградена от хиперболата върху интервала [1,***e***] е 1). Но дали това е същата константа ***e***, дефинирана по-горе като границата (2)?! Доказателство на това е приведено в следващите разсъждения.

Тъй като lnx = $\int_1^{x}\frac{dt}{t}$, според определението на lnx като площ, заградена от хиперболата y = 1/x върху интервала [1,x], то от една страна производната на lnx е

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \tag{4}$$

а от друга страна вследствие на определението за производна на функция като граница на нейното нарастване при безкрайно малко нарастване на аргумента

$$\frac{d}{dx}\ln x = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}[\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{x})] = \lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$$

Нека u = $\frac{h}{x}$. Тогава h = ux и $\frac{1}{h} = \frac{1}{ux}$.

$$\frac{d}{dx}\ln x = \lim_{u\to 0}\ln(1+u)^{\frac{1}{ux}} = \lim_{u\to 0}[\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\lim_{u\to 0}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}.$$

Нека n = $\frac{1}{u}$. Тогава u = $\frac{1}{n}$ и от u $\to$ 0 следва n $\to \infty$. Тогава

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{x}\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \frac{1}{x}\ln e, \qquad (5)$$

От равенства (4) и (5) следва равенството $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\ln e$, където e е точно границата $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (от (2)) и за да бъде изпълнено това равенство е необходимо $\ln e=1$, тоест става въпрос за едно и също число e.

В резултат получаваме три различни, но еквивалентни един на друг начини за дефиниране на Ойлеровото число ***e***:

(а) като граница на редица от числа

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + {}^{1}\!/_{n}\right)^n;$$

(б) като сума на безкраен ред

$$e = 1 + {}^{1}\!/_{1!} + {}^{1}\!/_{2!} + {}^{1}\!/_{3!} + {}^{1}\!/_{4!} + \dots + {}^{1}\!/_{n!} + \dots ;$$

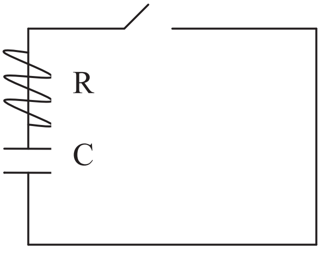
(в) като единственото число, за което

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1.$$

Стъпката, която остава да бъде направена в исторически план към въвеждането на показателната функция е определянето на степен с произволен реален показател. Заслугата затова е на Нютон (края на 17 в.). Впоследствие Йохан Бернули разглежда степени с променлив реален показател и на практика въвежда показателната функция (Виленкин, 1985).

Методически аспекти

Обобщеният анализ на учебните програми по математика показва, че степенуване с естествен показател и свойствата на степенуването с естествен показател се изучават още в 6 клас. В 10 клас (задължителна подготовка, ЗП и профилирана подготовка, ПП) като нови знания след изучаване на операцията коренуване биват въведени степенуването с рационален показател и логаритмуването при определена основа. Всичко това предхожда въвеждането на показателната и логаритмичната функция в 11 клас (само на второ равнище), което е логично, тъй като необходима предпоставка за това са понятията реално число и множество на реалните числа. Това позволява въвеждане на операцията степенуване при произволен показател (реално число) и оттам въвеждането на понятието показателна функция (при реален аргумент в определена дефиниционна област). В 11 клас (ПП) се изучава също така, какво е обратна функция и монотонна функция, което пък от своя страна е необходимо условие за дефиниране на логаритмичната функция като обратна на показателната функция. В задължителната подготовка за 12 клас като нови знания към тема „Функции" е предвидено изучаването само на тригонометричните функции, докато при профилирана подготовка се въвеждат елементите на анализа. Основният извод от направения анализ е, че показателната и логаритмичната функция се изучават единствено при профилираната подготовка в 11 клас и не се изучават никъде в задължителната подготовка.



Фиг. 4. Разреждане на кондензатор

От друга страна, в природните науки има значими и съответно изучавани явления и процеси, които протичат по така наречения *експоненциален закон*, при който определена величина нараства или намалява експоненциално. Типични примери в обучението по физика за процеси, при които се наблюдава експоненциално намаляване са разреждането на кондензатор и радиоактивният разпад. Например, когато кондензатор се разрежда през резистор, скоростта с която зарядът напуска кондензатора се характеризира с големината на електричния ток I, който протича през резистора (Фиг. 4). Токът пък от своя страна се определя от съпротивлението R и напрежението U на резистора: $I = U/R$. От друга страна напрежението U зависи от капацитета C на кондензатора и останалия в кондензатора заряд Q: $U = Q/C$. Следователно $I = Q/(RC)$, което показва, че скоростта I, с която намалява зарядът в кондензатора е пропорционална на заряда на кондензатора във всеки един момент.

И така, ще казваме, че една величина нараства или намалява експоненциално, ако скоростта, с която се променя величината остава пропорционална на самата величина през цялото време. Оттук веднага можем да направим два основни извода за характера на експоненциалните закони: (1) колкото по-голяма става с времето една величина при експоненциално нарастване, толкова по-бързо продължава да нараства; (2) обратно, колкото по-малка става с времето една величина при експоненциално намаляване, толкова по-бавно продължава да намалява.

Примерът с кондензатора е много добър и може да предхожда дефиницията за експоненциално нарастване или намаляване, тъй като в този пример скоростта не е абстрактно понятие, а се характеризира с една реална величина – големината на тока I през резистора. След подобен пример поднасянето на дефиницията за експоненциалните закони вече няма да изглежда формално.

За да определим вида на функцията, която ще послужи като най-добър математически **модел** за описание на процес, протичащ по експоненциален закон, най-напред означаваме с N(t) величината, чието изменение с времето ще изследваме. Нека за много малък интервал от време Δt величината се е изменила с ΔN(t). Скоростта на изменение се определя като изменение за единица време, т.е ΔN(t)/Δt. При експоненциалните закони тази скорост е пропорционална на самата величина, следователно

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = kN(t) \tag{6}$$

където *k* е коефициентът на пропорционалност. Коефициентът *k* има размерност и тя се определя от равенството

$$\mathrm{k} = \frac{(\Delta N(t) / N(t)}{\Delta t} \tag{7}$$

Равенство (7) показва, че *k* е относителното изменение ΔN(t)/N(t) на N(t) за единица време Δt и е безразмерна величина. Следователно резмерността на *k* е $(\text{време})^{-1}$. Стойностите на *k* могат да бъдат положителни (при експоненциално нарастване) и отрицателни (при експоненциално намаляване), а времето може да се измерва в секунди, минути, дни, години и т.н. Ако стойността на *k* е "+0.020 на секунда" това означава, че N(t) се увеличава с 2% за секунда. Ако *k* е "-0.5 на година", то N(t) намалява с 50% на година. Ако *k* е 1, то N(t) нараства със 100%, т.е. 2 пъти за единица време.

Равенство (6) задава зависимостта, която съответният математически модел трябва да удовлетворява, но от тази зависимост все още не е ясен аналитичният вид на търсената функция. В този момент отново за предпочитане би било да не се пристъпва към формализъм и даване наготово на аналитичния вид на функцията, а по-скоро да се осигури възможност на учениците сами, с минимална помощ от страна на учителя, да достигнат до отговора. Особено подходящ и напълно приложим е подходът на Бартлет (Bartlett, 1976), в който учениците трябва да използват като опорни знания познатите им до момента функции – линейна, квадратна и тригонометрични функции. Предлага им се да проверят дали някоя от тях не удовлетворява равенство (6).

Ако предположим, че търсената функция е линейна, тоест $N(t) = bt$, тогава $\Delta N(t)/\Delta t$ като пропорционална на $N(t)$, трябва също да бъде линейна функция на t, но

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{b(t+\Delta t) - b}{\Delta t} = \frac{b\ + b\Delta t - b}{\Delta t} = \mathrm{b},$$

което очевидно не удовлетворява равенството (6).

Ако пък предположим, че става въпрос за квадратна функция, то $N(t) = bt^2$ и

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{b(t+\Delta t)^2 - b\ ^2}{\Delta t} = \frac{b\ ^2 + 2b\ \Delta t + b(\Delta t)^2 - b\ ^2}{\Delta t} =$$

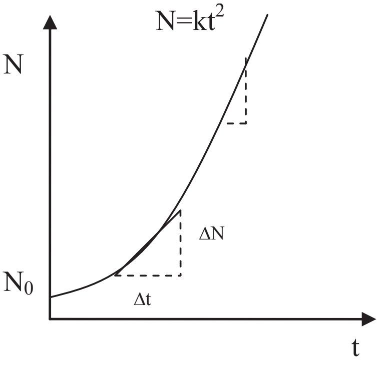
$$2bt + k\Delta t \approx 2bt,$$

което не е квадратна функция на t. Следователно и тази възможност отпада.

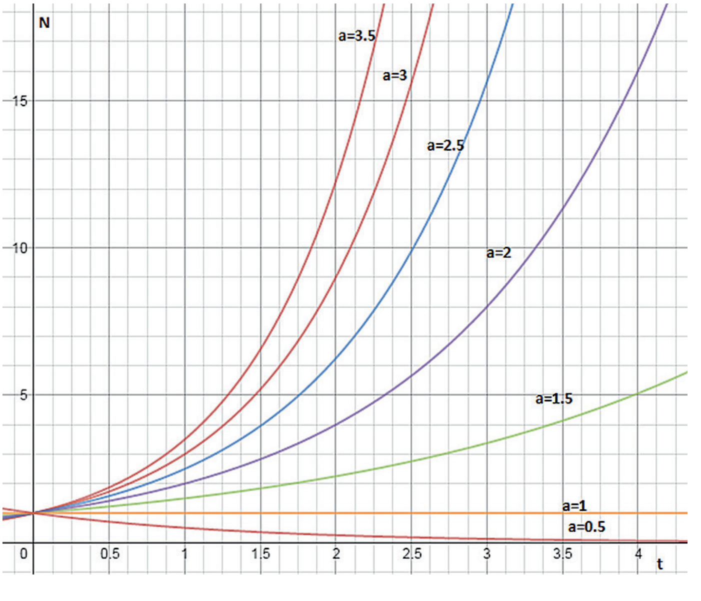
Аналогично правим проверка и отхвърляме следващото предположение $N(t)=b\sin(\omega t)$. Добре би било също така, при тези разглеждания да се използва възможността да се представи графично скоростта на изменение $\Delta N(t)/\Delta t$ на величината и да се каже, че тя характеризира наклона на графиката на функцията $N(t)$ (Фиг. 5) – на по- голямо нарастване $\Delta N(t)$ съответства по-голям наклон.

Накрая изследваме функцията $N(t) = N_0 a^{bt}$. Фиг. 6 представя графиките на функцията $N(t) = a^t$ за различни стойности на **a** (за простота е прието, че $N_0=1$ и $b=1$). След като се убедим, че това е търсената функция преминаваме към въвеждане на числото ***e***. Можем да зададем един от следните въпроси: (1) при каква стойност на a, наклонът на графиката на $N(t) = a^t$ в точката (0,1) е 45^0; (2) за коя стойност на a, скоростта на нарастване на $N(t)$ е равна на $N(t)$.

Двата въпроса са еквивалентни един на друг. Тъй като наклонът на графиката на 2^x спряма оста Ox в (0,1) е приблизително около 35^0, а наклонът на графиката на 3^x пак спрямо Ox в същата точка е около 48^0 и този наклон постепенно се увеличава от 35^0 до 48^0, когато **a** се изменя от 2 до 3, следователно търсеното число е между 2 и 3. Може да се даде и приближена стойност 2.7 на числото ***e*** или друго, по-добро приближение, например 2.718....



Фиг. 5. Наклон на графика



Фиг. 6. Графики на показателната функция a^x за различни стойности на a

След като знаем, че аналитичния вид на функцията, която удовлетворява равенство (6) е $N(t) = N_0a^{bt}$, трябва да намерим **a** и **b** при известен коефициент на пропорционалност *k*. От

$$\frac{dN(t)}{dt} = \mathrm{bln(a)}N_0a^{bt} = \mathrm{bln(a)}N(t)$$

следва, че a и b трябва да бъдат подбрани по начин, при който равенството $k=b\ln(a)$ да бъде удовлетворено. Ако изберем $a = e$, то $\ln(a) = \ln e = 1$ и $k = b$. Тогава

$$N(t) = N_0ekt \tag{8}$$

Бихме могли да изберем a=2 или a=10, тогава b=k/ln2 или b=k/ln10 и функцията $N(t)=N_0a^{bt}$ няма да бъде така удобна за работа, както (8).

В природните науки е важна още следната характеристика на експоненциалните закони – времето, за което величината се удвоява (при експоненциално нарастване) и времето, за което намалява два пъти (при експоненциално намаляване). Формулата се извежда лесно в общия случай. Времето T, за което величината N ще нарастне C пъти се определя от

$$N(t) = CN_0 = N_0e^{kT},$$

откъдето $C = e^{kT}$, което след логаритмуване води до

$$T = \frac{\ln C}{k} \tag{9}$$

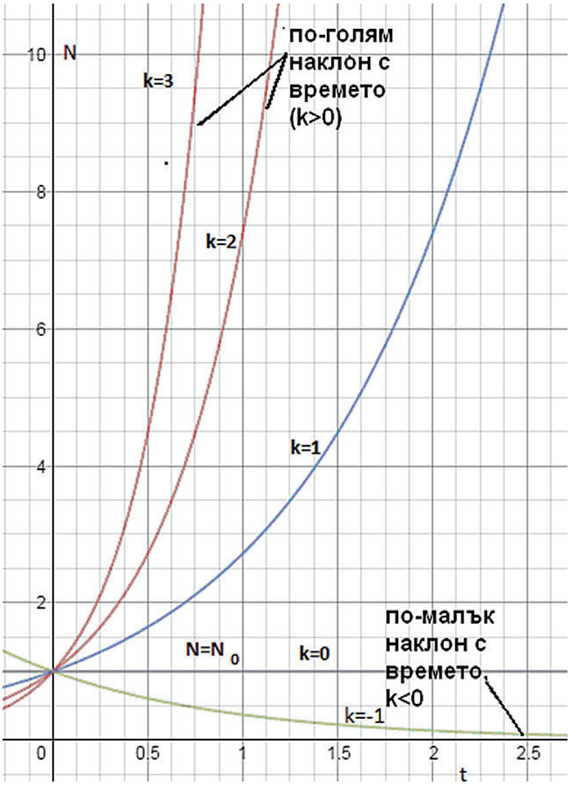
Най-важният извод от формула (9) е, че T е константа. Освен това, няма значение кой момент от време ще изберем за начало на нашите измервания. Ако в този начален момент величината N има стойност N_0, то след време T, величината ще има стойност CN_0; след време 2T стойността и ще е $C.CN_0=C^2N_0$ и така нататък. След време nT (n периода от време T) тя ще е увеличила първоначалната си стойност C^n пъти. С други думи, на аритметичната прогресия, отговаряща на равните интервали от време

$$0, T, 2T, 3T, \dots, nT, \dots$$

съответства геометричната прогресия

$$N_0, C^1N_0, C^2N_0, C^3N_0, \dots, C^nN_0, \dots$$

от нарастващи стойности на величината N. Например, времето на удвояване (C=2), което е равно на $T_2=\ln 2/k\approx 0.693/k$ показва, че след всеки такъв период от време T_2, N ще нараства като геометрична прогресия с частно 2.



Фиг. 7. Графики на експоненциалната функция e^{kx} за различни стойности на k

Аналогични са разсъжденията и в случаите, когато имаме експоненциално намаляване. Например при радиоактивния разпад говорим за време на полуразпад $T_{1/2}$ – времето, за което броят ядра, които не са се разпаднали, са наполовина по-малко от броя им след продходния период на полуразпад. В този случай k<0, тъй като $\Delta N<0$ (имаме намаляване), C=1/2 и от формула (9) получаваме

$$T_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{k} = -\frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{|k|}$$

Стойността на периода T може да се измерва в години, дори милиони и милиарди години (в някои случаи на радиоактивен разпад), но може да се измерва в секунди и дори части от секундата (при верижни реакции), поради което познаването на тази стойност е от изключителна важност. Условието да имаме права пропорционалност между скоростта на изменение на величината N и стойностите на N води до ускоряване на процесите с времето (при експоненциално нарастване, $k>0$) и до тяхното забавяне с времето (при експоненциално намаляване, $k<0$). Това се илюстрира с увеличаване на наклона с времето ако $k>0$ и съответно до намаляване на наклона с времето при $k<0$ (Фиг. 7).

Друг много важен аспект, на който трябва да се обърне внимание е, че в реалните ситуации става въпрос за някаква начална стойност N_0 на величината N, която е винаги крайно число. Поради това, в случаите, в които имаме експоненциално намаляване ще дойде момент във времето когато стойността на N ще достигне 0 (кондензаторът ще се разреди напълно при разреждане, радиоактивните ядра ще се разпаднат изцяло при разпад и т.н). Това на пръв поглед е в противоречие с Фиг. 7 (за отрицателно k графиката се доближава асимптотично до оста x и никога не я пресича). Но ако уточним (което е задължително от методична гледна точка), че функцията (и нейната графика) е само **модел** за описание, а моделът само приблизително отразява реалната ситуация ще избегнем противоречието. В случая с явленията, които протичат по експоненциален закон, математическият модел, който най-много се доближава до реалността и в този смисъл я описва най-точно (но не напълно) е експоненциалната функция. В този ред на мисли под експоненциален „*закон*" би трябвало да разбираме само математическия модел, от който можем да получим определена информация, например след приблизително колко време ядрата при разпад ще намалеят наполовина, но няма да знаем кои точно ядра ще се разпаднат, тъй като този процес в същността си е вероятностен.

Заключение

За обучението по математика и природни науки са важни междупредметните връзки и уменията за моделиране на реални ситуации. За съжаление прекомерното съкращаване на часовете в учебните планове се отразява негативно на възможността за ефективно постигане на тези важни цели, което прави тяхното присъствие в учебните програми да изглежда почти само пожелателно. Усвояването на конкретни умения е свързано със специална организация на учебния процес, при която учениците трябва да бъдат въвлечени в активна дейност, а за това е необходимо време.

Наистина явленията, които се подчиняват на експоненциалния закон са изключително много, както във физиката, така и в другите природни, а и социални науки също (Виленкин, 1985). Темата е обширна и с много области на приложение. Остана незасегнат и въпроса за логаритмичната, полулогаритмичната и степенната функционални скали, както и графичния метод, по който се проверява дали една зависимост има експоненциален характер. Всичко това намира приложение в учебната програма по физика за 12 клас (ПП).

В основата на тази статия бе заложен интердисциплинарен подход, като целта бе постигането на по-задълбочено вникване във връзките чрез изучаване на генезеса на основните понятия. Тъй като учениците никога не се отказват да задават въпроси от рода на: „Защо учим всичко това?" или „Откъде се взе това?" и т.н., което един доброжелателен учител би възприел като проява на критично мислене, то да се надяваме, че по отношение на темата на статията е направена една полезна стъпка в помощ и на учители и на ученици.

БЕЛЕЖКИ

1. http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap319.pdf
2. http://www.albartlett.org/articles/art1998jan.html
3. http://www4.ncsu.edu/~njrose/pdfFiles/Prostha.pdf
4. http://en.wikipedia.org/wiki/Logarithm
5. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/e.html
6. http://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Mascheroni_constant
7. http://mathworld.wolfram.com/eApproximations.html
8. http://en.wikipedia.org/wiki/E_%28mathematical_constant%29

ЛИТЕРАТУРА

Башмакова, И.Г., Майстров, Л.Е., Розенфелд, Б.А., Чириков, М.В., Шейнин, О.Б., Юшкевич, А.П., Андропова, В.И., Дорофеева, А.В., Ожигова, Е.П. & Симонов, Н.И. (1975). *История на математиката: математиката на XVII век; втори том.* София: Наука и изкуство.

Виленкин, Н.Я. (1985). *Функции в природе и технике: книга для внекласного чтения IX-X кл.* Москва: Просвещение.

Шенъ, А. (2005). *Логарифм и экспонента.* Москва: МЦНМО.

Шибасов, Л.П. & Шибасова, З.Ф. (2008). *За страницами учебника математики - татематический анализ, теория вероятностей: пособие для учащихся 10—11* классов. Москва: Просвещение.

Bartlett, A. (1976). The exponential function – Part I. *Physics Teacher, 14*, 393-401.

Cha, I. (1999). Mathematical and pedagogical discussion of the function concept. *J. Korea Soc. Math. Educ., 3*, 35-56.

Galili, I. (2008). History of physics as a tool for teaching. In: Vicentini, M. &

Sassi, E. (Eds.). *Connecting research in physics education with teachers education*: *volume 2.* Manhattan: ICPE.
Jankvist, U.T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educ. Studies Mathematics*, *71*, 235-261.
Jankvist, U.T. (2010). An empirical study of using history as a ‘goal’. *Educ. Studies Mathematics*, *74*, 53-74.
Jankvist, U.T. (2011). Anchoring students’ metaperspective discussions of history in mathematics. *J. Res. Math. Educ.*, *42*, 346-385.
Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: a brief survey. *College Mathematics J, 20*, 282-300.
Toeplitz, O. (2007). *The calculus: a aenetic approach.* Chicago: University of Chicago Press.
Tzanakis, C. (1999). Unfolding interrelations between mathematics and physics, in a presentation motivated by history: two examples. *Intern. J. Math. Educ. Sci. & Techn., 30,* 103-118.
Tzanakis, C. (2002). On the relation between mathematics and physics in undergraduate teaching. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching and Learning of Mathematics (at the undergraduate level), John Wiley & Sons Inc. New York, ISBN 0-471-46332-9 (in electronic form)*.
Tzanakis, C. & Coutsomitros, C. (1988). A genetic approach to the presentation of physics: the case of quantum theory. *Eur. J. Physics*. *9*, 276-282.
Tzanakis, C. & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathemtics and physics in mathematics education: some methodological and epistemological remarks. *For Learning Mathematics*, *20*, 44-55.

ABOUT THE EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FUNCTIONS AND THE NUMBER *e*

Abstract. The main goal of this article is to help mathematics and science teachers in their instructional work. The genesis of main concepts, connected with the topic, is revealed through an interdisciplinary approach. Historical and methodological connections are subjected to research and additional information, missing in textbooks, is given.

✉ **Ms. Ivelina Kotseva**
Department of Physics Education
University of Sofia
5, James Bourchier Blvd.
1164 Sofia, Bulgaria
E-mail: iva_georgieva@phys.uni-sofia.bg