New Approaches
Нови подходи

ЩАСТЛИВИТЕ ЧИСЛА: ИГРАТА КАТО ИНСТРУМЕНТ ЗА УЧЕНЕ И ИЗМИСЛЯНЕ НА ЗАДАЧИ[1)]

Тодор Ялъмов
Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Резюме. Статията обсъжда една популярна игра сред учениците в едно столично училище, измислена от едно от тях. Дискутира се как тя може да стане основа за въвеждане в програмирането за Android, за изчислително решаване на задачи, свързани с играта с помощта на Excel, за създаване на нови задачи и за първи стъпки в научноизследователската работа от страна на ученици в началното и основното образование. Щастливо число дефинираме като четирицифрен номер на автомобил в България, при което с аритметични действия с първите две цифри може да се получи резултат, равен на резултат от аритметични действия с последните две цифри. Играта се реализира като мобилно приложение, намира се най-дългата поредица от щастливи числа и се формулират други задачи. Дават се предложения как учителите биха могли да развиват изследователски интерес у учениците с помощта на тази и други подобни игри.

Keywords: arithmetic skills, games, coding for kids, calculative problem solving

Въведение

Уменията за извършване на аритметични операции са основна съставка на грамотността, а тяхното забавено придобиване е симптом за различни нарушения на детското развитие. След първоначалното любопитство към цифрите, броенето, събирането и изваждането под формата на игра и щедро възнаграждавано от родителите с подкрепа и положителни емоции децата бързо губят интерес към аритметиката в училищната среда, когато таблицата за умножение става задължение, стимулите са отрицателни (броят се грешките, а не правилните отговори), а атмосферата стане скучно сериозна. Параноичното недоволство (страх, че не е достатъчна) от математическата подготовка се среща дори в училища като „Аркола“, където класните стаи (за ученици до V клас, 11-годишни) приличат на нещо средно между детска градина и офис на технологична компания (цветни, удобни, разположението на чиновете предполага постоянна работа в екип, дизайнът е центриран върху интеракцията между учениците, а не е тип казарма или кино), където децата получават домашно да играят на образователни електронни игри (пазарният лидер в предоставянето на такива услуги е IXL), където домашното често задължително включва родителите, а училището организира седмични методически семинари (демонстрации на преподаване и препоръки как родителите да помагат на децата си). Каква е реакцията на училищната общност? Организира вечер на математиката с безплатна вечеря, което не е без значение за бедните семейства с по три-четири деца, на която всяка учителка организира микроработилница за забавна математика и на практика образова и родителите как да се занимават с децата у дома, има състезания и награди за всички. Канят суперзвездата Jacob Scott (носител на наградата „Учител на годината“ за 2011 г. за окръг Монтгомъри в щата Мериленд и медийна знаменитост), бивш състезател по борба и учител по математика в училище „Блеър“, който успява да мотивира много ученици с традиционно слаби резултати по математика да научат повече, като рапира математиката. На другия бряг друг учител – Lamar Queen от Лос Анджелис, получава подобно признание през 2010 г. за рапирането на математиката, с което завладява учениците си през 2007 г.

В надпреварата за ученическото внимание за математика в САЩ наскоро се включи една нова българска компания – „Джъмпидо“, изградена върху екипа и опита с образователни приложения на „Нимеро“, друга успешна ИТ инициатива на същите собственици. „Джъмпидо“ пусна една от първите в света математически образователни игри за „Кинект“, която дава възможност за комбиниране на физическа активност, отборна игра и математика – предимно аритметика. Ксу и Ке (Xu and Ke, 2014) предлагат и аргументират моторно-психологически подход към ученето с акцент върху жестовете. Игрите първо бяха тествани и добре приети в България, а сега се продават в САЩ.

В повечето от успешните случаи на привличане и задържане на вниманието на учениците става дума за комбиниране на представяне по нетрадиционен начин на основни теореми или решаването на вече измислени и тривиални задачи по аритметика с нови средства, които ангажират многопосочно децата. Статията тук предлага друг подход (близък до геймификацията), който има за цел да развие потенциала на децата да измислят нови задачи чрез трансформиране на занимателни извънучилищни игри в математически наратив. Предлага се използването на изчислителни решения (с помощта на електронни таблици), които са по-лесни за възприемане от аналитичните или могат да ги предхождат, за да се намери отговорът на задачата, а след това да се докаже аналитично, че е той. На базата на тези изчислителни решения се предлага реализирането на мобилни приложения-игри, които могат да бъдат направени от децата. Измислянето на задачи без съмнение е по-сложно от решаването им. В съществуващите учебници, помагала и масова практика в България, а и в голяма част по света, се развиват умения за формулиране на наратив във вид на нова задача, съответстващ на определен аритметичен израз или практическа ситуация, но реални умения за измисляне на нови задачи (нови абстрактни отношения) се тренират само у огрничен кръг състезатели по математика (и то доста след завършвне на началното им образование). Единици са учениците, които измислят и публикуват задачи в българските сп. „Математика“, сп. „Математика +“ и сп. „Математика и информатика“, както и в световните списания за елементарна математика като Crux Mathematicorum, Mthematical Gazette, Квант и други.

Когато дъщеря ми (тогава втори клас) предложи да играем на „щастливи числа“ (който открие повече щастливи числа на номерата на колите, които виждаме, той печели), докато пътуваме с колата, бях изненадан, че дефиницията е доста по-сложна от тази, която знаех **Д1**: Щастливо число ще наричаме запис от вида ABCD, където буквите са цифрите от 0 до 9 и A+B=C+D. По-късно се оказа, че нейна приятелка (тогава трети клас) е видоизменила Д1 до **Д2**: Щастливо число е ABCD, за което има такива аритметични оператори ✪ и ❄ („+“, „-“, „.“ или „/“), за които A✪B=C❄D, а дъщеря ми го е видеоизменила до **Д3**, позволявайки на операторите да обръщат реда на цифрите – т.е. A✪B би могло да бъде B-A или B/A. Записът 0000 не участва в играта, защото няма такъв номер на кола. Разбира се, децата не използваха понятието „оператори“, а обясняваха с изчерпателни примери. Играта (Д3) се оказа увличаща не само за нашето семейство, но и за много от съучениците на децата ми в 138. СОУ. На първо място, играта натренира сина ми (тогава първи клас) на елементарна аритметика, комуто таблицата за умножение вече беше почнала да омързва. На второ място, бързо появилият се въпрос кои числа са повече – щастливите или нещастливите, и невъзможността ми да отговоря на този въпрос „наум“ и да докажа емпиричното наблюдение, че казвахме по-рядко щастливи числа от половината от колите, които виждахме, породиха интереса да се занимавам „математически“ с тази игра, но по разбираем за децата начин. На трето, стана основа за разработване на игри и изследвания на развитие на аритметичните умения на учениците. Играта и математическите въпроси се оказаха удобно алиби за бързо въвеждане в работата с различни функционалности на Excel.

Математическото откритие

Авторовите нагласи (както в областта на управлението, така и в областта на образованието) са най-общо казано конструктивистки (виж повече в Toshev, 2015). Ученето става през действие и саморефлексия, но най-вече през учене чрез (емпирично) изследване и игра, в което се създават условия за (в случая) математическо откритие – за конструиране на нови задачи и математическа реалност, а не толкова за репродуциране на факти и рутинно приложние на формули. Сред родителите и някои учители са разпространени много митове, сред които е и традиционното вярване, че всичко важно е вече открито и дори и да се открие нещо ново, това може да стане само от много надарени математици. Тези митове влияят на подходите за преподаване, прилагани от учителите и по този начин ограничават децата в тяхната математическа креативност. Харт (Hart, 2002) и Уелдеана и Абрахам (Weldeana, Abraham, 2014) показват, че е възможно тези вярвания да бъдат променени чрез подходящи математически ситуации.

Задача 1. Колко са щастливите числа според Д3?

Ще решим задачата изчислително с Excel. Ако имаме номер на кола ABCD, записан в четири колонки по една цифра в колонка, лесно можем да напишем всички възможни аритметични операции A✪B и C❉D и да проверим дали има съвпадащи резултати. Възможните резултати за всяка двойка цифри са 5: A+B, A.B, |A-B|, A/B (при $B\neq 0$) и B/A (при $A\neq 0$). Необходимо е да автоматизираме работата с Excel, защото, ако правим сметките „ръчно“, все едно с калкулатор, и за всеки запис ни трябва по една секунда за операция, а сравнението става мигновено, ще ни трябват (9999*10)/(60*60) часа, или почти 28 пълни часа, което е почти 4 работни дни непрекъснато смятане.

Първо, ако в колона A е записано числото N между 1 и 9999, то формулата INT(N/1000), записана в колона B, дава цифрата на хилядите, INT((N-B*1000)/100) – на стотиците, MOD(N,10) в колона E дава цифрата на единиците, а MOD((N-E)/10,10) в колона D – цифрата на десетиците. Записваме в следващите 5 колони (F до J) възможните резултати от аритметични операции F=B+C, G=B.C, H= IF(C=0,-100,B/C), I= IF(B=0,-101,C/B), J=ABS(B-C). В колони H и I кодираме деленето на 0 с -100 и -101 съответно, за да можем да сравняваме по-лесно с другите резултати. Аналогично в колони от K до O записваме възможните аритметични резултати на последните две цифри (записани в колони D и E), като деленето на 0 кодираме с -102 и -103 съответно. В колони от P до T записваме проверката (1 – да, 0 – не) дали някое от числата в колони F, G, H, I, или J е равно на поне едно число от записаните в колоните от K до O. В колона U записваме проверката дали числото е щастливо, като проверяваме дали има поне една 1 в колоните P до T чрез формулта U=MAX(P:T), даваща 1, ако има поне 1, и 0, ако всички записи са 0.

По-долу са дадени записите за проверките (дадени са за втория ред и първото число 0001 за улеснение на читателя, ако реши да ги копира директно в Excel):

P2= IF(F2=K2,1,IF(F2=L2,1,IF(F2=M2,1,IF(F2=N2,1,IF(F2=O2,1,0)))))
Q2=IF(G2=K2,1,IF(G2=L2,1,IF(G2=M2,1,IF(G2=N2,1,IF(G2=O2,1,0)))
R2=IF(H2=K2,1,IF(H2=L2,1,IF(H2=M2,1,IF(H2=N2,1,IF(H2=O2,1,0)))))
S2=IF(I2=K2,1,IF(I2=L2,1,IF(I2=M2,1,IF(I2=N2,1,IF(I2=O2,1,0)))))
T2= IF(J2=K2,1,IF(J2=L2,1,IF(J2=M2,1,IF(J2=N2,1,IF(J2=O2,1,0)))))

Демонстрацията, че не е необходимо да се пишат „ръчно“ всички числа от 0001 до 9999 и съответно цифрите им, а е достатъчно да се напишат само първите две числа, а след това да се селектират и да се „дръпне“ надолу точката в долния десен край, беше много ефектна. Още повече че Excel „сам разбира“, че в първата колонка трябва да увеличава числото с 1, а в останалите да изчислява цифрите на хилядите, стотиците, десетиците и единиците, както и дали има съвпадения в резултатите при сравненията.

Накрая или със сума SUM(U2:U10000), или с маркиране на колона U виждаме, че има общо 3951 щастливи числа измежду 0001 до 9999. Това е почти 4 щастливи числа на всеки 10 коли. Започнахме да засичаме дали съотношението на щастливите числа сред колите, които виждаме – на паркинга или в движение, за известен период от време е същото. Видяхме, че доста по-често луксозните коли са с щастливи числа (основно заради номера от типа AAAA, ABAB или ABBA, AAA(A+1), A(A+1)(A+2)(A+3) и т.н.). Това се обяснява с факта, че предпочитаните модели числа от хората с връзки в КАТ или възможности да платят за избор са щастливи (дори и собствениците им да не знаят нашата дефиниция). От това съотношение направихме извода, че е по-вероятно случайно взета кола да е с нещастлив номер. Е, нашата семейна кола е точно с нещастлив номер и това е типично. Тъй като колата на съпругата ми е също с нещастлив номер, се зачудихме дали и това е типично?

Задача 2. Ако семейство Иванови има две коли, а Петрови – една, кое е по-вероятно:

(а) Иванови да имат две коли с нещастливи номера или Петрови да имат кола с щастлив номер?

(б) И двете коли на Иванови да са с едновременно щастливи или нещастливи номера или да имат една с щастлив и една с нещастлив номер?

Вероятността Иванови да имат две коли с нещастливи номера е $0.605*0.605 \approx 36.6\%$, докато вероятността Петрови да имат щастлив номер е 39.5%, т.е. по-малко вероятно е Иванови да са с два нещастливи номера, отколкото Петрови с щастлив. В този смисъл, това, че и двете ни коли са с нещастливи номера, не е много типично. В същото време обаче вероятността и двете коли да са с едновременно щастливи или нещастливи номера е $0.395*0.395 + 0.605*0.605 \approx 52.2\%$, което е по-вероятно от това да са с един щастлив и един нещастлив номер (вероятността е $2*0.605*0.395 \approx 47.8\%$). Т.е. от друга гледна точка, това, че са с еднаква щастливост, е всъщност типичното.

Разбира се, точната вероятност за Иванови е ((9999-3591)/9999)*(9998-3951)/9998) и обяснението за децата е доста по-дълго от написаното тук. Беше необходимо, за да го разберат, да се дадат много примери с монети „ези-тура“, да използваме цветни флумастери в кутия (за да имитираме случен избор с вероятност 40%) и т.н. Връзката между честота и вероятност се затвърди с отговарянето на следния въпрос:

Задача 3. Кое е по-вероятно – следващият щастлив номер да е четен или нечетен?

Емпирично виждахме по-често четни щастливи номера. Можем да ги преброим в Excel по два начина, най-малко. Първо, записваме в нова колонка 1 на реда срещу 0001 и 0 срещу 0002, за да изобразим нечетно и четно число. Опитваме да видим дали Excel ще разбере логиката ни за четно-нечетно, но се оказва, че не разбира. Нищо. Ще копираме числата и още веднъж скрито ще говорим за алгоритмична ефективност. Ако трябва да ги копираме по двойки, ще ни трябват почти 5000 копирания, по-точно 4998 и едно последно дописване на 1-ица за последното число. Ако обаче първо копираме веднъж 1 и 0 и получим 1,0,1,0 и после копираме четирите цифри, ще ни трябват още 2498 копирания и 3 дописвания или 2499 копирания и едно изтриване, или общо 2500 копирания и едно изтриване. Аналогично виждаме, че ако всеки път копираме вече копираните 1 и 0, виждаме, че броят на попълнените нечетни/четни клетки расте най-бързо. 2^{14}=16 384, което означава, че на 13-ото копиране вече ще сме попълнили всички клетки и ще трябва да изтрием останалите (които са ни в повече). Разбира се, бихме могли да използваме и функцията MOD(N,2), която ни дава директно остатъка на числото N при деление с 2, което е 1 за нечетните и 0 за четните, и да използваме вече добре познатата ни функция „дърпане“ за попълване на цялата колонка. Неусетно за децата обаче ги въведохме и в други, по-сложни функции на Excel.

За да разберем колко са нечетните щастливи числа, трябва да съберем онези 1-ици от щастливите числа, за които има 1-ица в колонката, показваща нечетно или четно число е. Можем да направим нова колонка, в която да умножим двата реда и резултатът ще е 1 само в случаите, в които числото е едновременно нечетно и щастливо. После със SUM(.) или с избиране на цялата колонка виждаме, че нечетните щстливи числа са 1910. Лесно въвеждаме и функцията SUMPRODUCT(X2:X10000,U2:U10000), където X е колонката с четността на числата.

Четните щастливи числа са 3951-1910=2041, което ни показва, че е по-вероятно следващият щастлив номер, който видим, да е четен.

Задача 4. Кои са цифрите, на които завършват най-често и най-рядко щастливите числа?

Аналогично на кодирането на четни и нечетни можем да използваме кодиране с 1 и 0, ако съответната цифра на единиците е t с формулата IF(E=t,1,0), и след това да използваме функцията SUMPRODUCT. Но има и по-елегантен начин, който дава възможност да се демонстрират обобщените (осеви) таблици (pivot) в Excel. За редове използваме данните от колона E (цифрата на единиците на числата), не пишем нищо за колоните, а за изобразяване в единствената резултантна колона избираме стойност сума на съответните данни в колона „щастливи числа“. Така на всеки ред с цифра на единиците Е се сумират 1-иците за щастливите числа, което дава броя им. Най-често срещаната последна цифра на щастливите числа е 2, а най-рядко – 9.

Таблица 1. Брой на щастливите числа спрямо цифрата на единиците

Цифра на единиците	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Брой щастливи числа	413	446	467	451	414	367	401	331	346	315

Всички тези задачи породиха множество въпроси – „това математика ли е“, „колко вида щастливи числа има“ (особено когато в IV клас по математика видяха в учебната тетрадка, че има задачи за щастливи числа според Д1), „ама наистина ли това са нови задачи, които никой досега не е решавал“, „как се разбира дали някой преди теб също я е измислил“, „има ли състезания за измисляне на задачи, както има за решаване“? Творчеството в българските училища до голяма степен е ограничено до предметите „Изобразително изкуство“ и най-много „Домашен бит и техника“ и в разнообразните общоучилищни изяви (празнични базари, училищни празници и преглед на художественото творчество), докато в „Аркола“ например всички деца се учеха да свирят на музикален инструмент (права флейта в трети клас, а по-късно на китара, пиано или цигулка) и ги оценяваха за елементарна композиция (според стандарта Curriculum 2.0). Математическото творчество е ограничено до интересно решаване на задачи и учениците приемат почти аксиоматично, че някои супервещи в занаята измислят задачите (учебник, сборници, олимпиади), а те само ги решават. Тези нагласи следва да се променят, както и практиката да се приемат предимно аналитични доказателства, а не програмноизчислителни (особено в по-големите класове). В същото време играта и задачите, породени от нея, са удобен повод да се покаже на учениците, че понякога аналитичното доказателство е по-бързо и по-лесно от изчислителното, а в други случаи няма по-бърз начин за намиране на дадена стойност от определен алгоритъм за изчисление.

Задача 5. Кои са цифрите на хилядите, стотиците и десетиците на щастливите числа, които се срещат най-често и най-рядко?

Можем да решим задачата по същия начин като Задача 4 с пивот таблица и да видим, че 2 и 9 са съответно най-често и най-рядко срещаната цифра на съответните позиции в щастливите числа. В същото време, ако допуснем, че има число с цифра на десетиците X, което се среща по-често (по-рядко) от 2 (9), то ако ABXD е произволно щастливо число, то и ABDX е щастливо и съответно бихме получили щастливо число с цифра на единиците по-често (по-рядко) срещана от вече установената 2 (9). Аналогично, ако цифрата е на хилядните (XBCD) или стотиците (AXBC), то съответите числа CDBX и BCAX също биха били щастливи и пак бихме получили, че X трябва да е 2 (9). Това е пример как можем да сведем (аналитично) задачата до вече решена и да няма нужда да изчисляваме.

Задача 6. Колко са щастливите числа според Д1?

Всяко щастливо число по Д1 е щастливо и по Д3, така че очакваме да са по-малко. С формулата =IF(B2+C2=D2+E2,1,0) и дърпане до 10 000 ред получаваме 0 и 1 за нещастливите и щастливите числа по Д1. Така намираме, че има 669 щастливи числа, или около 17% от щастливите числа, което е горе-долу 1 щастливо по Д1 от всеки 6 щастливи по Д3.

За разлика от Задача 1 тази задача има „лесно“ и разбираемо за по-малките ученици аналитично решение.

Ще преброим щастливите числа, като преброим за всяко число S (което идва от сумата на цифрите на първата двойка цифри и на втората двойка) по колко различни начина може да се получи тази сума.

Първо, забелязваме, че S е число между 1 и 18. 0 не може да бъде, защото ако A+B=C+D=0, то A=B=C=D=0, а ние още в самото начало изключихме тази възможност (няма номер на кола с число 0000). Повече от 18 не може да бъде сумата, защото максималната сума се получава при максимални A и B, което е 9 и 9 и се получава 18.

За S=1 има две възможности (0,1) и (1,0), за S=2 възможностите са три (0,2), (1,2), (2,2) и т.н. За S<10 възможностите са S+1: (0,S), (1,S), …. (S,0). За 18≥S≥10 броят на възможностите е 19-S: (S-9,9), … , (9,S-9). За по-малките, за които този аналитичен вид е доста неразбираем, може да се разпишат всички възможности една по една. Общият брой числа от вида ABCD, за които A+B=C+D=S, е равен на $(S+1)^2$ за S<10 и $(19-S)^2$ за 18≥S≥10. Тогава общият брой щастливи числа по Д1 е $2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 2*(4+9+16+25+36+49+64+81) + 100 + 1 = 2*284+101 = 669$.

Разбира се, подобен подход би сработил и за преброяване на щастливите числа по Д3, но много по-сложно. Например 2316 е щастливо число, при това 2.3=1.6 и 2+3=6-1. Т.е. при броене на различните комбинации A℘B=C℘D=S едно и също число ABCD може да генерира различни резултантни S в зависимост от операторите (което не е възможно, ако и двата оператора са едновременно „+“ и сме при условията на Д1). Този проблем се преодолява, ако разглеждаме такива резултантни S (и сумираме броя на различните възможности за щастливи числа ABCD), които са минимални за числото ABCD – т.е. не съществува друга комбинация от оператори, за които общото равенство е по-малко от S. Така например числото 81 е максимално възможното, което може да се получи с една аритметична операция на две цифри =9.9. В същото време то не може да бъде минимална резултанта, защото единственото щастливо число ABCD, за което A□B=C❄D=81, е 9999. За него обаче очевидно има оператори („-“), за които резултатът е 9-9=9-9=0. Любопитно е, че най-голямата минимална резултанта е 24 (=8*3=4*6) и съответните щастливи числа 8346, 8364, 3846 и 3864 не могат да генерират по-ниска резултанта. Всички останали по-големи S (25, 27, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 49, 56, 63, 64, 72, 81) се получават като произведение на единствена комбинация от две числа, което означава, че ако вземем разликата им, тя ще е по-малка от 9 и съответно от всяко едно от тези S. Останалите минимални резултанти са числата от 1, 2, 3… 15 и 16. За всяко едно от тях могат да се намерят щастливите числа, които ги формират (като се изключват тези, които които могат да генерират по-ниска стойност с други аритметични операции), сумират се, а после се преброяват повтарящите се. Във всички случаи този подход е по-бавен, но все пак е различно решение на задачата.

Задача 7. Коя е най-дългата редица от щастливи числа (по Д3)? Ако има повече от една редица с максимална дължина, да се намерят всички редици с тази дължина.

За да решим задачата, ще се опитаме да преброим всички поредни щастливи числа. Предлагаме следния алгоритъм. В колона U имаме записи 1 за щастливо число, 0 за нещастливо. В колона V ще записваме поредността на съответното щастливо число от същия ред в колона U спрямо предходните числа в по-горните редове. V2=1 е първото щастливо число. Броим по следния начин: VN=IF(UN=0,0,1+V(N-1)). Ако числото на съответния ред е нещастливо (UN=0), то и VN=0 (т.е. не участва в редица щастливи числа, включваща щастливи числа преди него). Ако е щастливо, то стойността му е с единица по-голяма от съответното число на по-горния ред. Ако е първото щастливо след поредица нещастливи, то съответната стойност в колона V е 1 (=1+0), а ако предходното е било V(N-1) поред, то щастливото число на ред N е 1+V(N-1).

Сега, за да намерим колко е дълга най-дългата редица, записваме в някоя клетка функцията =MAX(V2:V10000) и резултатът е 20. Сега с операцията FIND от менюто проверяваме да видим колко пъти се среща 20 в колоната и виждаме, че е само веднъж. 20-ото поредно щастливо число е 2215, което означава, че най-дългата редица от щастливи числа е 2196, 2197, ... 2214, 2215. Важно е да се отбележи, че търсенето следва да става по стойност, а не по формула (което е търсенето по подразбиране в Excel), защото иначе ще намери множество клетки, в които в текста на формулите има „20“ (например на всеки ред, в чийто номер има 20, като 120 ред, 220 ред и т.н.).

Възможно е да се даде аналитично доказателство, че не е възможно да има редица от 21 щастливи числа, но е доста дълго (и никой ученик от по-малките класове не би имал търпение да премине през цялото доказателство), затова ще го оставим за упражнение на читателя. Най-общо стратегията на доказателство минава през намиране на повече комбинации от резултати с последните две цифри измежду последователни 21 числа, отколкото са възможни с първите две цифри Следващите по дължина редици от щастливи числа са с дължина 16 (няма редици, които да не са подмножество на 2196, ... , 2215 и да са с дължина 17,18 или 19) са (0198, ..., 0213), (0299,...,0314), (1098,...,1113), (2999, ..., 2014).

Задача 8. Коя е най-дългата редица от щастливи числа (по Д1)? Ако има повече от една редица с максимална дължина, да се намерят всички редици с тази дължина.

Задача 8 е опит да сравним характеристиките на щастливите числа по различните дефиниции. Нека ABCD е щастливо и следващото число е щастливо по Д1 и $D \neq 9$, тогава A+B=C+D=C+D+1, което е невъзможно. Ако D=9 и $C \neq 9$, то A+B=C+9=(C+1)+0, което е невъзможно. Остава C=D=9, тогава и A=B=9, което също е невъзможно, защото следващото число е 10 000 и вече не е четирицифрено число. Т.е. получихме, че по Д1 няма последователни щастливи числа.

Лесно се забелязва, че има много двойки числа с разлика 9, които са щастливи (например 6978 и 6987). Аналитично може да се докаже, че няма двойка числа с по-малка разлика, които да са едновременно щастливи по Д1.

Задача 9. Да се намери най-дългата (най-дългите) редица (редици) със сменяща се щастливост/нещастливост на числата (по Д3).

Решаваме отново изчислително задачата. В нова колона (Z) дефинираме Z2=0 и Z3=IF(U2=U3,0,Z2+1). По този начин, ако предходното число е имало същата щастливост като настоящото, то броячът в Z се нулира. Броячът показва 1, ако съответното число е първото поредно различно от предходното, 2 – ако е второто. За да намерим максимално дългата редица, трябва да намерим максималното число в колоната Z и да прибавим 1, така ще преброим и предходното число (с което започва редицата). В случая става дума за редица, дълга 13 числа, и по конкретно това са две редици (0239,..., 0251) и (2039,...2051).

Задача 10. Да се намери дължината на най-дългата редица от нещастливи числа по Д3.

Възможни са разнообразни нови задачи, базирани на играта, както и на трите дефиниции за щастливи числа, които оставяме (както и решението на задача 10) на фантазията и усърдието на читателя.

В математическата литература съществува и една четвърта дефиниция на щастливи числа (обобщаваща за числа с повече или по-малко цифри)

Д4: Щастливо число е такова, което в последователния процес на замяна на числото със сумата от квадратите на цифрите му се стига до 1. Най-малкото щастливо число след 1 е 7 – 7, 49, 97, 130, 10, 1. При останалите числа след известно време се получава цикличност, формирана от числото 2 – 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4.

Щастливите числа по Д4 станаха популярни в теория на числата след публикацията на Guy (1981), в която той показва разнообразни факти, вкл. пет последователни щастливи числа по Д4 – 44488, 44489, 44490, 44491, 44492, и поставя въпроса дали има произволно дълги редици от последователни щастливи числа. El-Sedy & Siksek (2000) отговарят положително на този въпрос. Разбира се, практически е доста трудно да се играе играта с тази дефиниция, защото се изискват много повече изчисления. Pan (2008) доказва, че има произволно дълги редици от последователни обобщени щастливи числа (в произволна бройна система и сума на произволни степени).

Д4 ни подтикна да помислим за обобщение на Д3, валидно за всички числа, като например Д5: Числото е щастливо, ако с аритметични действия на първите няколко цифри можем да получим еднакъв резултат на аритметични действия с останалите цифри на числото. В тази дефиниция можем да направим същите разграничения като при Д2 (да не се позволява разместване на цифрите, а да се слагат само аритметичните знаци) и Д3 (да се позволява разместване на цифрите), да се позволяват скоби или не и т.н. Д5 обаче не е точно математическо обобщение на Д3, защото добавя нови щастливи четирицифрени числа (както беше при Д3 спрямо Д2 и при Д2 спрямо Д1), но пък поставя по интересен начин въпроса за обобщенията.

Дали тези нови щастливи числа ще имат интересни свойства и какво е най-красивото обобщение на Д3, предстои да видим и се надяваме, че това ще бъде направено самостоятелно или с участието на ученици.

Програмиране за деца

Крачката до реализиране на играта като мобилна игра беше много малка. Синът ми настояваше да се научи да програмира, понеже искаше да променя игрите, на които играеше. След дълго търсене и преговори с приятели програмисти се принудих да потърся и намеря сам платформа, на която бих могъл да се науча (отново) да програмирам, за да мога след това да помогна на сина си. Открих платформата *App Inventor,*[2)] която е преработената от Google платформа Scratch на MIT с вкарани разнообразни сензори за телефоните и интерфейс, подходящ за тях.

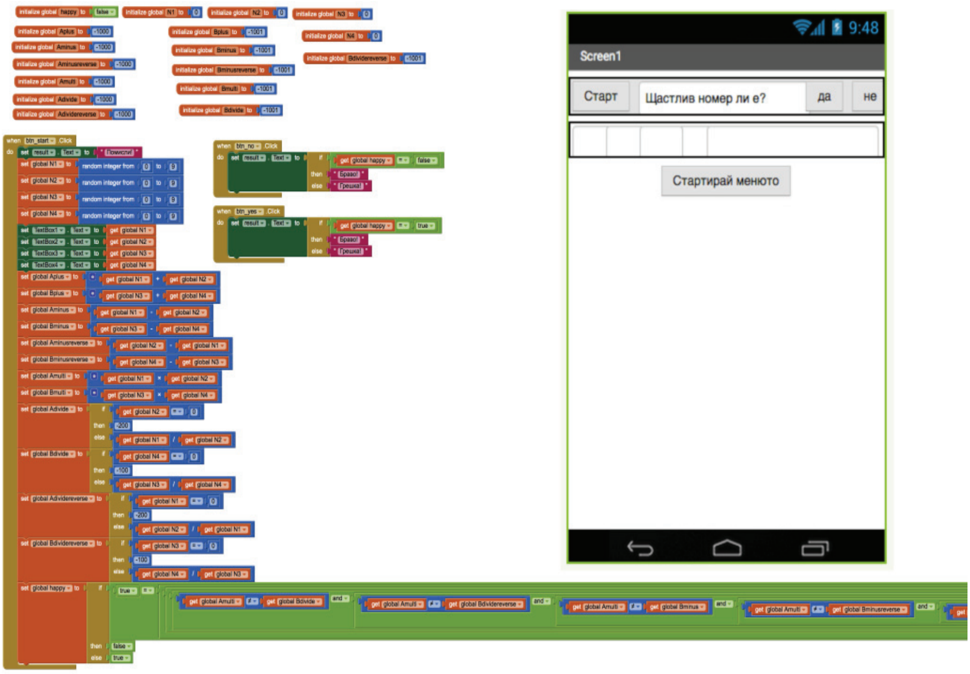
Програмирането чрез App Inventor е все едно подреждане на пъзел, изключително функционално лесно дори за деца от I до IV клас. В рамките на инициативата Coder Dojo – София, която стартирах през юни 2014 г. с подкрепата на фондация „Приложни изследвания и комуникации“ (проект Jam Today на програма „Хоризонт 2020“), много деца направиха първите си игри за Android за по-малко от ден. Играта „камък-ножица-хартия“ е само един ред и използва вградения акселерометър в телефона за засичане на тръскане/движение. В такъв случай се генерира случайно число от 1 до 3 и спрямо него се изобразява картинка на трите предмета.

На фиг. 1 е дадена голяма част от програмата, симулираща играта с щастливите числа. С бутона „старт“ се започва играта, генерирайки случайно число с четири цифри. За улеснение (за да не се правят допълнителни проверки и да се генерира отново случайно число, ако се получи 0000), не се изключва числото 0000 да участва в играта и се приема за щастливо. При правилен отговор (натискане на бутон „да“ или „не“) дали числото е щастливо, или не играта връща „Браво! “, а при грешен – „Грешка!“. Аналитичната проверка дали числото е щастливо, или не се прави в последния ред (отрязан в картинката, тъй като е много дълъг). На практика, той проверява не дали има поне един аритметичен резултат с първите две цифри, равен на аритметичен резултат с последните две цифри, а дали всичките аритметични резултати с първите две цифри се различават от аритметичните резултати с последните две цифри. Ако всичките резултати са различни, тогава числото е нещастливо.

Предложение 1. Тъй като е възможно учениците да „налучкват“ дали числото е щастливо, или нещастливо, може да се добавят бутони „+“, „-“, „.“ и „/“, както и стрелка „⇔“ за смяна на посоките под всяка група цифри и при верен отговор детето да трябва да покаже кои точно оператори използва, за да получи еднакви аритметични резултати с двете групи цифри.

Предложние 2. Да се въведе таймер, който да симулира движение по улицата с различна скорост (по-бавно или по-бързо да изчезва номерът). Да се добави условие, че при правилни отговори скоростта се увеличава, а при грешни намалява.

Играта би могла да се развива в различни посоки, включително да има различни нива, като най-лесното би било да се използва дефиниция 1 за проверка дали числото е щастливо, или не и след като се постигне определена скорост на вярно отговаряне, да се преминава към следващо ниво (дефиниция 3). С помощта на MindWave устройството (електроенцефалограф с един сух електрод) може да се засича нивото на концентрация и изобщо мозъчните вълни при играене на играта, за да се определи кои щастливи числа са най-затрудняващи децата или да се определи за конкретно дете кои аритметични операции са му най-сложни, както и да се измери скоростта, с която се учи да смята, играейки. Интересът към MindWave от страна на децата и родителите по време на проведеното Coder dojo през юни 2015 г. показва, че би бил и допълнителна мотивация за децата, тъй като чрез него те биха могли да уп-



Източник: Автора с помощта на App Inventor 2

Фигура 1. Изглед на екрана на телефон под Android (вдясно) и програма, реализираща играта (вляво и отдолу)

равляват „само със силата на мисълта“ определени обекти в приложение на телефон, таблет или компютър.

Заключение

Съставянето на задачи и игри от страна на учениците изглежда подходящ инструмент за учене и стимулиране на интересите им към математиката. Този подход е все още на ниво хрумване, липсват достатъчно и адекватни методически указания, няма достатъчно практика, която да бъде изследвана и обобщена, за да бъде институционализиран инструментът в преподаването на математика у нас, а и по света.

Авторът е готов да предостави на заинтересовани учители работен файл на Excel с всички сметки, копие на играта за Android и MindWave устройство за записване на мозъчната активност на ученици, които играят играта (за временно ползване). В един по-късен етап би било интересно да се изследва дифузията на играта според дефиниция 3 и дали ще се появят нови версии (дефиниции) на щастливи числа (поне в България) и анализи на свойствата на щастливите числа по дефиниция 5.

Чрез подобни и различни игри децата лесно могат да бъдат увлечени не само в математиката, но и в природните науки, като цяло. В моята практика на уличен комуникатор на науката (под бранда „Цирк на науката“) често карам между 4 и 6 деца да си затворят очите, държейки едно въже, завързано за двата края и без да си ги отварят, да опънат въжето във формата на квадрат. Едновременно е и (отборна) игра, и решение на математическа задача за построение. Изработването на играчки, базирани на някакви физически принципи (модел на бял дроб, пушка на Гаус, калейдоскоп и т.н.) има същия ефект както направата на електронен вариант за щастливите числа, а експериментирането с балони с различна еластичност, диаметър на сламка, размер на вътрешния балон – за белия дроб; брой магнити и топчета, сила на магнитите – за пушката; брой стени на многостен за калейдоскопа, видове мъниста и т.н., създава онази конструктивистка среда, така необходима за по-ефективното учене на учениците. Най-общо този подход съчетава традиционната система Слойд, въведена във Финландия през 1865 г. (разпространена по-късно по цял свят, вкл. и България – като трудово обучение) и геймификацията в постмодерно време.

В България НАОП „Николай Коперник“ организира конкурс за ученици през 2015 г. по повод Международната година на светлината с включена категория „образователна игра“ като инструмент за подкрепа на ученето чрез игри, а през изминалите години бяха организирани множество конкурси за компютърни игри с определени технологии или тематични области (напр. Microsoft KODU през 2012 г. от БАИТ, конкурс „Игра с твоята идея“ за сценарий на игра без насилие през 2005 г. и т.н.).

БЕЛЕЖКИ

1. Статията е написана в резултат на престоя ми като стипендиант на комисия „Фулбрайт“ в Центъра по международно частно предприемачество във Вашингтон, САЩ (2013 – 2014). Изказвам благодарност на учителките на децата ми Elizabeth Wallerstedt и Elizabeth Nguyen и на целия учителско-родителски колектив от училище „Аркола“ в гр. Силвър Спринг, Мериленд, за вдъхновяващите дискусии за образованието и въвличането на родителите и общността в учебно-възпитателния процес, както и на Мариета Радилова и Жанет Лазарова – учителки на децата ми в 138. Средно общообразователно училище „Проф. Васил Златарски“ – София.
2. http://ai2.appinventor.mit.edu

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

El-Sedy, E. & Siksek, S. (2000) *On happy numbers*. Rocky Mountain J. Math., 30, 565 – 570.

Guy, R.K. (1981) *Unsolved problems in number mheory.* New York: Springer.

Pan, H. (2008) *On consecutive happy numbers. J. Number Theory*, 128, 1646 – 1654.

Toshev, B.V. (2015). *Recent papers on contructivism in education. Chemistry,* 24, 145 – 149.

HAPPY NUMBERS: PLAY AS A TOOL FOR LEARNING AND INVENTING OF PROBLEMS

Abstract. The paper discusses a popular game within an elementary school in Sofia, invented by one of its students. It suggests an approach to introduce an Android programming for kids on the basis of the game, how new mathematical problems could be invented and solved by Excel functions and computations and demonstrates first steps in doing research in elementary mathematics. A happy number is defined as a four-digit number of a car plate in Bulgaria, where an arithmetic operation of the first two digits equals the result of another (or same) arithmetic operation of the last two digits. A mobile app simulating the game is developed and the longest consecutive raw of happy numbers is found. Additional problems are formulated and suggestions are provided to teachers how to use this and other similar games to develop research interests and creative mathematical skills.

✉ **Dr. Todor Yalamov**
Business Department
University of Sofia
125, Tzarigradsko Chaussee, bl. 3
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: todor.yalamov@online.bg