

- Учебно съдържание, планове и програми •
- Curriculum Matters •

ЗАДАЧАТА ЗА ДВЕ ТЕЛА Е НЕОБХОДИМА И ВАЖНА В ХИМИЯТА

В. Г. ИВАНОВ, С. Т. ИВАНОВ

Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Резюме. Обектите и явленията, които се анализират в химията (например, атом на водорода, двуатомна молекула, удари на двуатомни молекули, среден свободен пробег на молекулите в газ и др.), водят до решаването на задачата за две тела, взаимодействащи си с гравитационни или електрически сили. Задачата въвежда важното за химика понятие „приведена маса“, тъй като движението на двете тела се свежда до движението на едно тяло с приведена (редуцирана) маса. Обърнато е внимание на физическите и математически особености на задачата.

Keywords: centre-of- mass frame, two-body problem, reduced mass

В химията и физиката широко се използва понятието „приведена маса“ [1-4] — например, при енергетичните нива и оттам при спектралните линии на атома на водорода [3,4] и на двуатомна молекула [1,3,4], при удари на двуатомна молекула [4] и т.н. Понятието „приведена маса“ се въвежда в задачата за две тела. Затова смятаме, че в курса по Обща физика е желателно, да не кажем необходимо, да се включи задачата за две тела. По традиция тя се решава за две тела, взаимодействащи си с гравитационни сили. Задачата за две тела в Теоретичната механика се решава с функция на Лагранж (вж. Напр. [3]). Едно елегантно и строго представяне (за съжаление на доста високо физично ниво) е направено в [5], където взаимодействието 2)

между двете тела е гравитационно (там е дадено и приложението на класическата задача за две тела в анализа на трептенията на двуатомна молекула).

Тук ние ще изложим задачата за две тела, взаимодействащи си с електрически сили. Именно с такива взаимодействащи си обекти се среща химика — споменатите вече протон и електрон в атома на водорода, ядрата на атомите в двуатомната молекула и др.

За доброто разбиране на задачата в началото ще въведем лабораторната отправна система — l -системата, и отправната система на центъра на масите — c -системата.

Най-напред ще определим импулса $\mathbf{p}$ на система от α на брой частици с маси m_i и скорости $\mathbf{v}_i$ ($i = 1, 2, \dots, \alpha$)

$$\begin{array}{ccccccc} m_1, & m_2, & \dots & m_\alpha, & & & \\ \mathbf{v}_1, & \mathbf{v}_2, & \dots & \mathbf{v}_\alpha, & & & \\ \mathbf{p}_1 = m_1 \mathbf{v}_1, & \mathbf{p}_2 = m_2 \mathbf{v}_2, & \dots & \mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha. & & & \end{array} \quad (1)$$

Частичката с маса m_i има скорост $\mathbf{v}_i$ и импулс $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$. Импулсът на системата е

$$\mathbf{p} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \Rightarrow \mathbf{p} = \sum_{i=1}^{\alpha} m_i \mathbf{v}_i. \quad (2)$$

Нейната маса е
$$M = \sum_{i=1}^{\alpha} m_i. \quad (3)$$

В механичната система съществува точка, която винаги — независимо от вида на движението на системата — се движи с такава скорост $\mathbf{u}$, че ако я умножим по пълната маса на системата M ще получим импулса на системата. Тази въображаема точка се нарича център на масата или център на инерцията. По определение радиус-векторът на центъра на масата е:

$$\mathbf{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} m_i \mathbf{R}_i}{\sum_{i=1}^{\alpha} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} m_i \mathbf{R}_i}{M}. \quad (4)$$

Означихме с $\mathbf{R}_c$ и $\mathbf{R}_i$ радиус-векторите съответно на центъра на масата и на i -частицата в лабораторната отправна система. Следователно центърът на масата се движи със скорост

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{R}}_c \equiv \frac{d\mathbf{R}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} m_i \dot{\mathbf{R}}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} m_i \mathbf{v}_i}{M}. \quad (5)$$

Като представим (5) във вида

$$Mu = \sum_{i=1}^{\alpha} m_i v_i \quad (6)$$

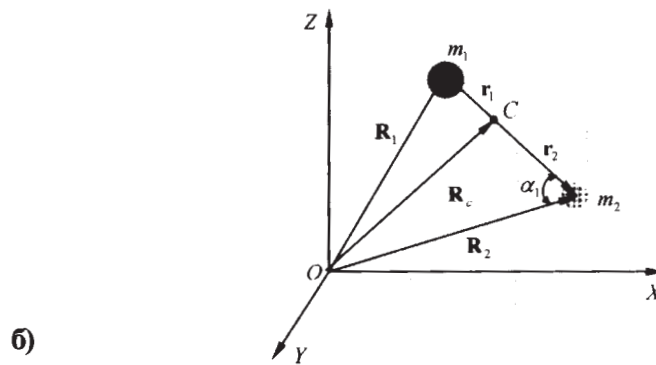
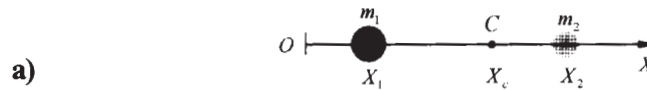
виждаме, че от дясната страна на равенството стои импулсът на системата. Това равенство разкрива физическия смисъл на центъра на масата: ако умножим скоростта на центъра на масата по масата на системата, ще получим импулса на системата. Все едно, че в тази въображаема геометрична точка сме поместили материална точка с маса, равна на масата на системата

$$(M = \sum_{i=1}^{\alpha} m_i).$$

Прието е отправната система, свързана с центъра на масата, да се нарича *c*-система, а тази, свързана с лабораторията — *l*-система. За система от две тела центърът на масата е показан на Фиг. 1.

В една затворена система ($F_{\text{exterior}} = 0$) има едно много полезно свойство на центъра на масата — при отсъствие на външни сили скоростта му е постоянна.

Действително, за затворена система:



Фиг. 1. Център на масата в *l*-системата, в която две тела съответно с маси m_1 и m_2 имат: а) координати X_1 и X_2 ($m_1 < m_2$) и б) радиус-вектори R_1 и R_2 ($m_1 > m_2$, r_1 и r_2 са радиус-векторите в *c*-системата)

$$u = \dot{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} m_i v_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} p_i}{M} = \frac{P}{M} = \text{const.} \quad (7)$$

В отправната система, свързана с центъра на масата — c -системата, импулсът на системата е нула. Това прави c -системата много полезна при решаването на редица задачи — еластични и нееластични удари, задачата за две тела и др.

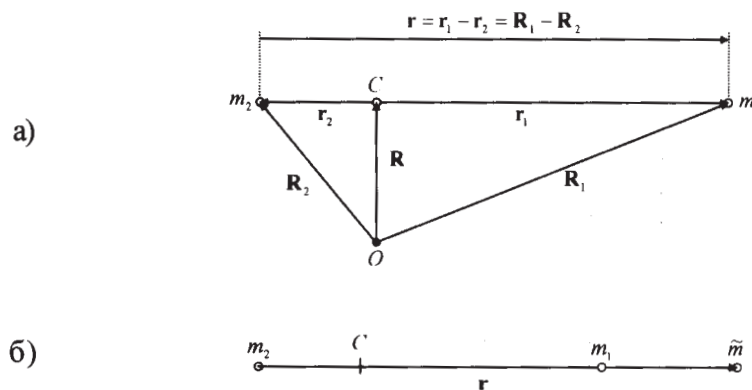
А сега да преминем към самата задачата за две тела. Нека вземем в лабораторната отправна система (l -системата) координатна система XYZ . В тази система с начало в точка O разглеждаме две тела с маси m_1 и m_2 и техните радиус-вектори $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ (Фиг. 2). За определеност $m_1 < m_2$. Центърът на масата е точка C с радиус-вектор $\mathbf{R}_c$, а $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ са съответни радиус-векторите на двете тела в c -системата с начална точка C .

На Фиг. 2 се вижда, че радиус-векторът на центъра на масата е

$$\mathbf{R}_c = \frac{\sum m_i \mathbf{R}_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2}{m_1 + m_2}. \quad (8)$$

В c -системата телата имат съответно радиус-вектори $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ и радиус-векторът на центъра на масата е нула — $\mathbf{r}_c = 0$. Съответно имаме

$$\frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = 0 \Rightarrow m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0. \quad (9)$$



Фиг. 2. Задачата за две тела: а) O — начало на l -системата; $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ са радиус-векторите на частиците m_1 и m_2 , а $\mathbf{R}$ — на центъра на масата C ; векторите $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ са радиус-векторите на частиците в c -системата с начало в точка C ; $\mathbf{r}$ е вектор на относителното положение на частиците — започва от m_2 и е насочен към m_1 ; б) Относителният радиус-вектор $\mathbf{r}$ определя положението на приведената маса $\tilde{m}$ в c -системата.

Въвеждаме относителен радиус-вектор $\mathbf{r}$ на първото тяло спрямо второто, като

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (10)$$

Решаваме системата уравнения (9) и (10) и определяме $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ чрез относителния радиус-вектор $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2 \mathbf{r}}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1 \mathbf{r}}{m_1 + m_2}. \quad (11)$$

Така намираме $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ в c -системата. От фиг. 2 се вижда, че в l -системата радиус-векторът на дадено тяло е сума от радиус-вектора в c -системата и радиус-вектора на центъра на масата в l -системата

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_c, \\ \mathbf{R}_2 &= \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_c. \end{aligned} \quad (12)$$

Двете тела се привличат със сила $F = k_0 e^2 / r^2$ (взимаме за пример атома на Н, който има електрон със заряд $-e$ и протон със заряд $+e$; $m_1 \equiv m_e$, $m_2 \equiv m_p$). Въвеждаме единичен вектор $\mathbf{r}^0$ по относителния радиус-вектор и отбелязваме, че посоката на силата върху протона $\mathbf{F}_p \equiv \mathbf{F}_2$ съвпада с посоката на $\mathbf{r}^0$ — следователно $\mathbf{F}_2$ е положителна, а посоката на $\mathbf{F}_e \equiv \mathbf{F}_1$ е противоположна на посоката на $\mathbf{r}^0$ — следователно $\mathbf{F}_1$ е отрицателна. Прилагаме II закон на Нютон [$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(d^2\mathbf{r}/dt^2)$] за тези две тела в c -системата:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= -k_0 \frac{e^2}{r^2} \mathbf{r}^0, \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= k_0 \frac{e^2}{r^2} \mathbf{r}^0. \end{aligned} \quad (13)$$

Разделяме първото уравнение на m_1 , а второто на m_2 и изваждаме почленно:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -k_0 \mathbf{r}^0 \frac{e^2}{r^2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right). \quad (14)$$

Полагаме

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{1}{\tilde{m}} \Rightarrow \tilde{m} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (15)$$

Масата $\tilde{m}$ се нарича приведена маса и $\tilde{m} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ (знакът “ $\sim$ ” се чете тилда).

Приведената маса се определя от масите на двете тела и в различни случаи тя е различна.

Нека $m_1 \ll m_2$. Да вземем конкретен пример: електрон с маса m_e и протон с маса m_p ($m_e \ll m_p$). В атома на водорода масата на електрона m_e е значително по-малка от масата на протона m_p , ($m_e/m_p = 1/1836$) и следователно, приведената маса на водородния атом е

$$\tilde{m} = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e} = \frac{m_e}{1 + \frac{m_e}{m_p}} \approx \frac{m_e}{1 + \frac{1}{1838}} \approx m_e \left(1 - \frac{1}{1838} + \dots \right) \approx m_e. \quad (16)$$

Приведената маса е приблизително равна на масата на по-леката частица, в случая — масата на електрона.

Нека масите на двете частици (например, масите на атомите в двуатомна молекула) са равни и да са m . Тогава за двуатомната молекула приведената ѝ маса, съгласно уравнение (15), е

$$\tilde{m} = \frac{mm}{m+m} = \frac{m}{2}. \quad (17)$$

Да се върнем към задачата за двете тела. Заменяйки $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ с $\mathbf{r}$, уравнение (14), съгласно (10), приема вида:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{1}{\tilde{m}} k_0 \frac{e^2}{r^2} \mathbf{r}^0 \Rightarrow \tilde{m} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k_0 \frac{e^2}{r^2} \mathbf{r}^0. \quad (18)$$

Това уравнение фактически е II закон на Нютон за частица с приведена маса $\tilde{m}$ и радиус-вектор $\mathbf{r}$, на която действа силата $-(k_0 e^2 / r^2) \mathbf{r}^0$. Така приведохме задачата за две тела с маси m_1 и m_2 (система от уравнения (13)), към задача за едно тяло с приведена маса $\tilde{m}$ (уравнение (18)).

Тази задача се решава лесно, но за да характеризираме правилно движението на двете частици, трябва да отбележим следните особености на задачата за две тела:

1) Движението на двете тела с маси m_1 и m_2 се свежда до движение на едно тяло в с-системата с приведена маса $\tilde{m} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ под действието на силата, действаща на първото тяло и радиус-вектор $\mathbf{r}$, чиято големина е относителното разстояние между двете частици, а направлението се определя от разликата $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

От уравнението за движение на приведената маса, на която действа силата на първото тяло $-(k_0 e^2 / r^2) \mathbf{r}^0$ можем да определим радиус-вектора $\mathbf{r}$.

3) Формулите (12) дават възможност за определяне на радиус-векторите $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ чрез $\mathbf{r}$. С други думи, ще получим радиус-векторите $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$, които определят траекториите спрямо неподвижния център на масата. Още веднъж ще припомним, че $\mathbf{r}(t)$, освен че определя траекторията на $\tilde{m}$ спрямо т. С, определя и траекторията на m_1 спрямо m_2 , т.е. като че ли m_2 е неподвижна.

4) Формулите (13) ни дават възможност да определим радиус-векторите на двете тела в l -системата. В l -системата положението на масите m_1 и m_2 се определя от радиус-векторите $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, т.е.

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (19)$$

С други думи, в l -системата траекториите на m_1 и m_2 се определят от техните радиус-вектори, а скоростите на частиците са първи производни на радиус-векторите.

ЛИТЕРАТУРА

1. Atkins P.W. *Physical Chemistry*, Second edition, Oxford University Press, 1982, § 17.3, § 25.2.
2. Цюлике Л. *Квантовая химия*, Мир, Москва, 1976, § 1.2.4.
3. Иванов С.Т. *Основи на теоретичната и квантовата механика*, Второ изд., Унив. Изд. „Св. Климент Охридски“, София, 2001, § 12.
4. Матвеев, А.Н. *Атомная физика*. Высшая школа, Москва, 1989, § 63.
5. Киттель, Ч., У. Найт, М. Рудерман. *Механика. Берклевский курс физики. I том*. Наука, Москва, 1971, § 9.7.

TWO-BODY PROBLEM IS NECESSARY AND IMPORTANT IN CHEMISTRY

Abstract. The objects and phenomena which are considered in chemistry (for example the Hydrogen atom, diatomic molecule, the elastic collisions of diatomic molecules, etc.) lead to the solution of the two-body problem with electrical forces interaction. In this way the term “reduced mass“ should be introduced as far as the motion of the both bodies transforms to the motion of one body with a reduced mass. The physical and mathematical peculiarities of the problem are underlined in the present paper.

✉ **Dr. V.G. Ivanov and Prof. Dr. S.T. Ivanov,**
Faculty of Physics,
University of Sofia,
5 James Bourchier Blvd., 1164 Sofia,
BULGARIA
E-Mail: vgi@phys.uni-sofia.bg
E-Mail: stefan@phys.uni-sofia.bg